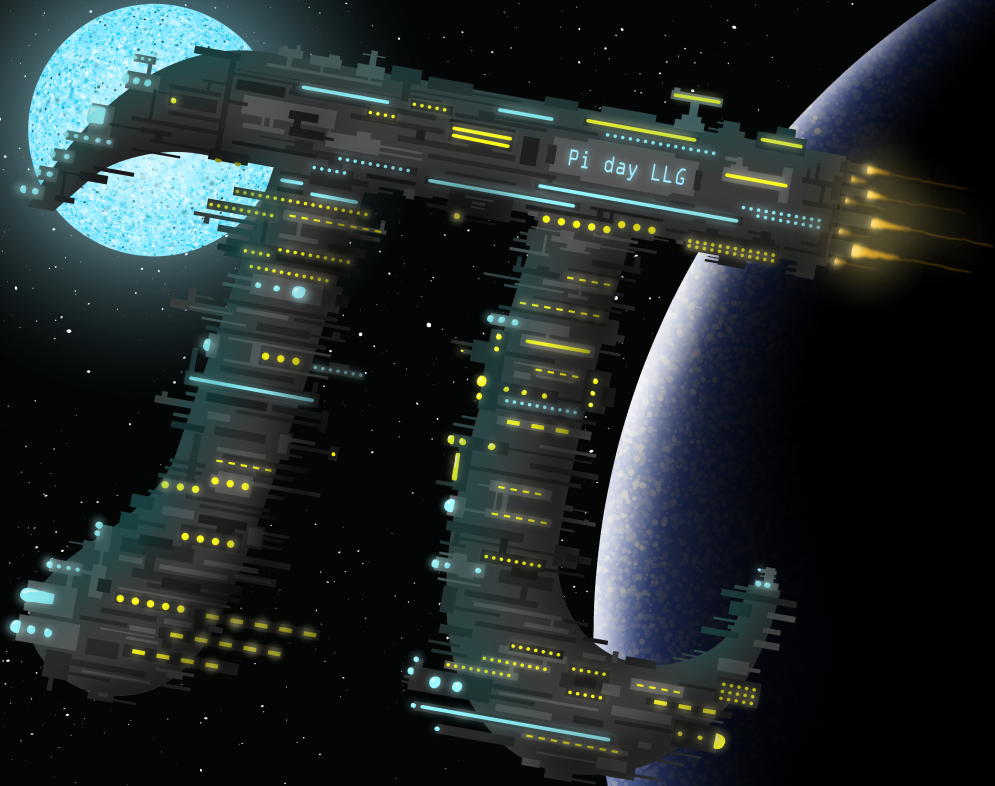


PI DAY LLG



13 Mars 2026



- 9H - 9H45 : Maena QUEMENER (IMJ-PRG) : Introduction aux fonctions de parking
 - 9H45 - 10H30 : Étienne MÄNN (LAREMA) : Comment analyser les données avec la topologie ?
 - 14H - 14H45 : Nicolas THOLOZAN (CNRS DMA) : TBA
 - 14H45 - 15H30 : Mura YAKERSON : Baking integers out of pi
- Les exposés ont lieu dans l'amphithéâtre



Affiche faite par Neïl MARIN-LEVRIER (CPES₁)

Avec l'aide de Célestin TOURNIER, Léonore-BATUT et Palatine RIGAUT

Inscriptions sur theojamin.netlify.app/piday

Mathématiques CPES DAC

14 Mars 2025

THEO.JAMIN@PSL.EU
PABLO.JIMENEZ@PSL.EU

Programme

Créneaux	Descriptifs
8h30 - 9h	Accueil, présentation des intervenants, description des ateliers
9h - 10h30	Exposés de Maena QUEMENER et Etienne MANN
10h30 - 12h	Démarrage des ateliers

Déjeuner

14h - 15h30	Exposés de Nicolas THOLOZAN et Mura YAKERSON
15h30 - 16h	Dégustation des π es et votes
16h - 17h	Reprise des ateliers
17h	Clôture du π -day

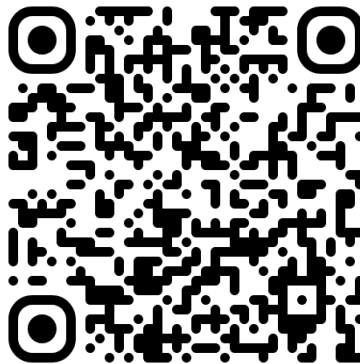


FIGURE 1 – QR code pour le vote de la meilleure Pie.

1 Exposés

1.1 Maena Quemener

Titre : *Introduction aux fonctions de parking.*

Résumé : Les fonctions de parking sont des objets combinatoires issus d'un problème simple où des voitures cherchent à se garer selon des préférences fixées. En 1966, A. G. Konheim et B. Weiss calculent la probabilité que toutes les voitures puissent se garer. Puis, en 1969, John Riordan et H. O. Pollak montrent que le nombre de fonctions de parking est donné par une formule explicite et qu'elles sont en bijection avec les arbres enracinés. En 1990, D. Dhar en propose une généralisation aux graphes quelconques. Cette extension relie les fonctions de parking au chip-firing game, au polynôme de Tutte et à des domaines plus algébriques. Ces connexions sont encore étudiées aujourd'hui.

1.2 Etienne Mann

Titre : *Comment analyser les données avec la topologie ?*

Résumé : La topologie est une branche des mathématiques fondamentales qui s'occupent de trouver ou « calculer » des formes : par exemple déterminer si un donut ressemble plutôt à un ballon ou à une tasse de café. Les mathématiciens ont développé des techniques avancées pour répondre à ces questions.

Depuis les années 1990, ces méthodes ont été utilisées pour analyser les données et, depuis 2015, elles commencent à être utilisées massivement, par exemple sur les réseaux ou en biologie.

1.3 Nicolas Tholozan

Titre : *Pavages d'espaces exotiques.*

Résumé : On sait depuis longtemps qu'il n'existe qu'un nombre fini de façons « paver » le plan euclidien, c'est-à-dire de le recouvrir par des formes identiques selon un assemblage qui se « répète à l'infini ». Mais qu'en est-il d'un espace de dimension supérieure ? D'un espace non-euclidien, et même non-riemannien ? Cette question sera l'occasion d'introduire ces géométries exotiques.

1.4 Mura Yakerson

Titre : *Baking integers out of pi.*

Résumé : Résumé à venir.

2 Ateliers

2.1 Un passager anarchiste — Théo Jamin

Un avion a des places numérotées de 1 à n , avec n un entier naturel. Le jour de l'embarquement, toutes les places ont été attribuées à un passager et les passagers se présentent dans l'ordre de leurs numéros de siège. Le premier passager, ne respectant pas les règles, s'assoit au hasard (il est possible qu'il s'assoie à sa place attribuée). Les passagers suivants s'assoient à leur place attribuée si elle est libre et sinon s'assoient au hasard.

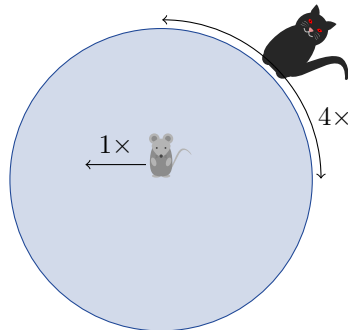
1. Pour $n = 2, 3$ ou 4 , déterminer la probabilité que le dernier passager puisse s'asseoir à sa place.
2. Déterminer cette probabilité pour n quelconque.

2.2 Un jeu dangereux — Théo Jamin

Vous participez à un jeu dans lequel, à chaque fois qu'une personne est touchée elle est éliminée. Vous êtes disposés en cercle et on vous attribue un numéro de 1 à n (pour n le nombre de joueurs) dans le sens des aiguilles d'une montre. Le premier joueur touche la personne suivante, qui est donc éliminée. Le joueur suivant fait de même et le jeu continue jusqu'à ce qu'il n'y ait plus qu'un joueur restant qui est déclaré vainqueur. Trouver un critère pour choisir votre place en fonction du nombre de joueurs n .

2.3 Le chat et la souris — Théo Jamin

Vous êtes dans votre jardin et vous venez de voir une souris tomber dans votre piscine (tout à fait ronde). Votre chat, comme tous les chats, aime les souris mais a horreur de l'eau. Vous notez que votre chat se déplace quatre fois plus vite que la souris.



La question que vous vous posez est donc la suivante : la souris réussira-t-elle à sortir de la piscine sans se faire attraper par le chat ?

2.4 Les maisons de Dudeney — Théo Jamin

Trois familles voisines se détestant mutuellement ont besoin d'eau, d'électricité et de gaz et doivent donc accéder quand elles le veulent aux trois usines. Vous êtes le maire de la ville où habitent ces familles. Elles vous demandent de l'aide pour l'accès aux usines et expliquent qu'elles souhaitent que vous construisiez les routes d'accès de chacune des maisons à chacune des usines, cependant, elles ne doivent pas se croiser pour éviter tout problème. Avez-vous une solution ? Que se passe-t-il si les familles habitent sur une autre planète possédant une géométrie différente de celle de la terre ?

2.5 Cardinaux de \mathbb{N} , \mathbb{Z} et \mathbb{Q} — Théo Jamin

1. Soit $A \subset \mathbb{N}$ un sous-ensemble infini. Montrer que A et \mathbb{N} sont en bijection.
2. Montrer que

$$f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}^*, \quad (n, m) \mapsto 2^m(2n + 1)$$

définit une bijection entre \mathbb{N}^2 et \mathbb{N}^* .

3. Montrer qu'il existe une bijection entre \mathbb{Q} et \mathbb{N} . En existe-t-il une entre \mathbb{N} et \mathbb{R} ?

2.6 Les miroirs — Théo Jamin

Vous vous trouvez dans une pièce carrée dont les murs sont des miroirs parfaits. Un rayon laser est envoyé depuis un coin de la pièce avec un certain angle.

Chaque fois que le rayon touche un mur, il se réfléchit selon la loi habituelle : l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion.

1. Que se passe-t-il si le rayon est envoyé exactement à 45° par rapport aux murs ?
2. Pour quels angles le rayon revient-il à son point de départ ?
3. Pour quels angles le rayon finit-il par atteindre un coin de la pièce ?
4. Combien de réflexions le rayon effectue-t-il avant de sortir ?
5. Peut-on trouver une façon simple de prévoir la trajectoire du rayon sans suivre toutes les réflexions ?

2.7 La suite logistique — Théo Jamin

On considère la suite (x_n) définie par la relation de récurrence

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n),$$

où $r > 0$ est un paramètre réel et x_0 est un nombre dans l'intervalle $[0, 1]$.

Cette suite apparaît dans des modèles simples de dynamique des populations : x_n représente la proportion d'une population à l'instant n et le terme $(1 - x_n)$ modélise la limitation des ressources.

1. Choisir une valeur de r et une condition initiale $x_0 \in [0, 1]$. Calculer les premiers termes de la suite.
2. Étudier le comportement de la suite pour différentes valeurs de r (par exemple $r = 1, 2, 3, 3.2, 3.5, 3.8$). La suite semble-t-elle converger, devenir périodique, ou se comporter de manière irrégulière ?
3. Trouver les points fixes de la fonction

$$f(x) = rx(1 - x).$$

4. Étudier le comportement de la suite lorsque $0 < r < 1$, puis lorsque $1 < r < 3$.
5. Que se passe-t-il lorsque r augmente ? Peut-on observer l'apparition de comportements périodiques ou chaotiques ?

2.8 Le jeu de la vie — Théo Jamin

Le *jeu de la vie*, introduit par JOHN CONWAY, est un automate cellulaire qui se joue sur une grille infinie de cases carrées. Chaque case peut être vivante ou morte.

À chaque étape, l'état de chaque case évolue selon les règles suivantes :

- une cellule vivante avec 2 ou 3 voisines vivantes survit,

- une cellule vivante avec moins de 2 ou plus de 3 voisines vivantes meurt,
 - une cellule morte avec exactement 3 voisines vivantes devient vivante.
1. Étudier l'évolution de configurations simples (un point, deux points, un carré de 2×2 , etc.).
 2. Trouver des configurations qui disparaissent rapidement.
 3. Trouver des configurations qui deviennent périodiques.
 4. Existe-t-il des configurations qui se déplacent ?
 5. Que peut-on dire du comportement à long terme du système ?

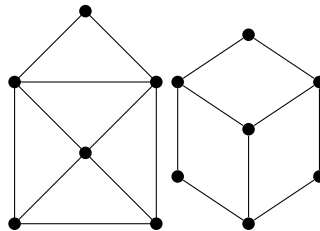
On pourra programmer le jeu et observer l'évolution de différentes configurations.

2.9 Le paradoxe des anniversaires — Théo Jamin

Dans un groupe de personnes, on s'intéresse à la probabilité que deux personnes aient le même anniversaire. On supposera qu'il y a 365 jours dans l'année et que chaque anniversaire est équiprobable.

1. Calculer la probabilité que deux personnes aient le même anniversaire dans un groupe de 2, 3 ou 4 personnes.
2. Calculer la probabilité que toutes les personnes aient des anniversaires différents dans un groupe de n personnes.
3. En déduire la probabilité qu'au moins deux personnes partagent le même anniversaire.
4. Pour quelle valeur de n cette probabilité dépasse-t-elle $1/2$?
5. Que se passe-t-il si l'on cherche la probabilité que *trois* personnes aient le même anniversaire ?

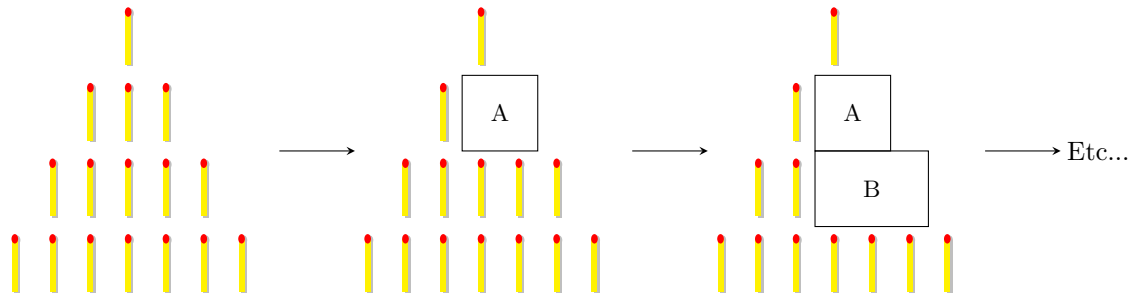
2.10 Parcours eulériens de graphes — Pablo Jiménez



On cherche à dessiner une forme comme celle-ci sans lever le crayon du papier, et sans passer deux fois par la même arête. Arrivez-vous à le faire sur le dessin de gauche ? Et celui de droite ? On appelle un tel chemin un *parcours eulérien* du *graphe* G en question. En étudiant le nombre d'arêtes qui sortent de chaque sommet, ce qu'on appelle le *degré du sommet*, trouvez une façon de différencier les graphes qui admettent un parcours eulérien de ceux qui n'en ont pas.

2.11 Le jeu de Marienbad — Pablo Jiménez

Le jeu de Marienbad se joue à deux : des allumettes sont disposées en quatre rangs de 1, 3, 5 et 7. Chaque joueur prend alors à son tour le nombre d'allumettes qu'il souhaite dans une seule rangée. Le gagnant est celui qui prend la dernière allumette.



L'un des deux joueurs a-t-il une stratégie gagnante ? Et si on modifie les règles ?

Fonctions de parking

D'une situation concrète à 50 ans de
recherche mathématique

Maena Quemener

Doctorante Sorbonne Université

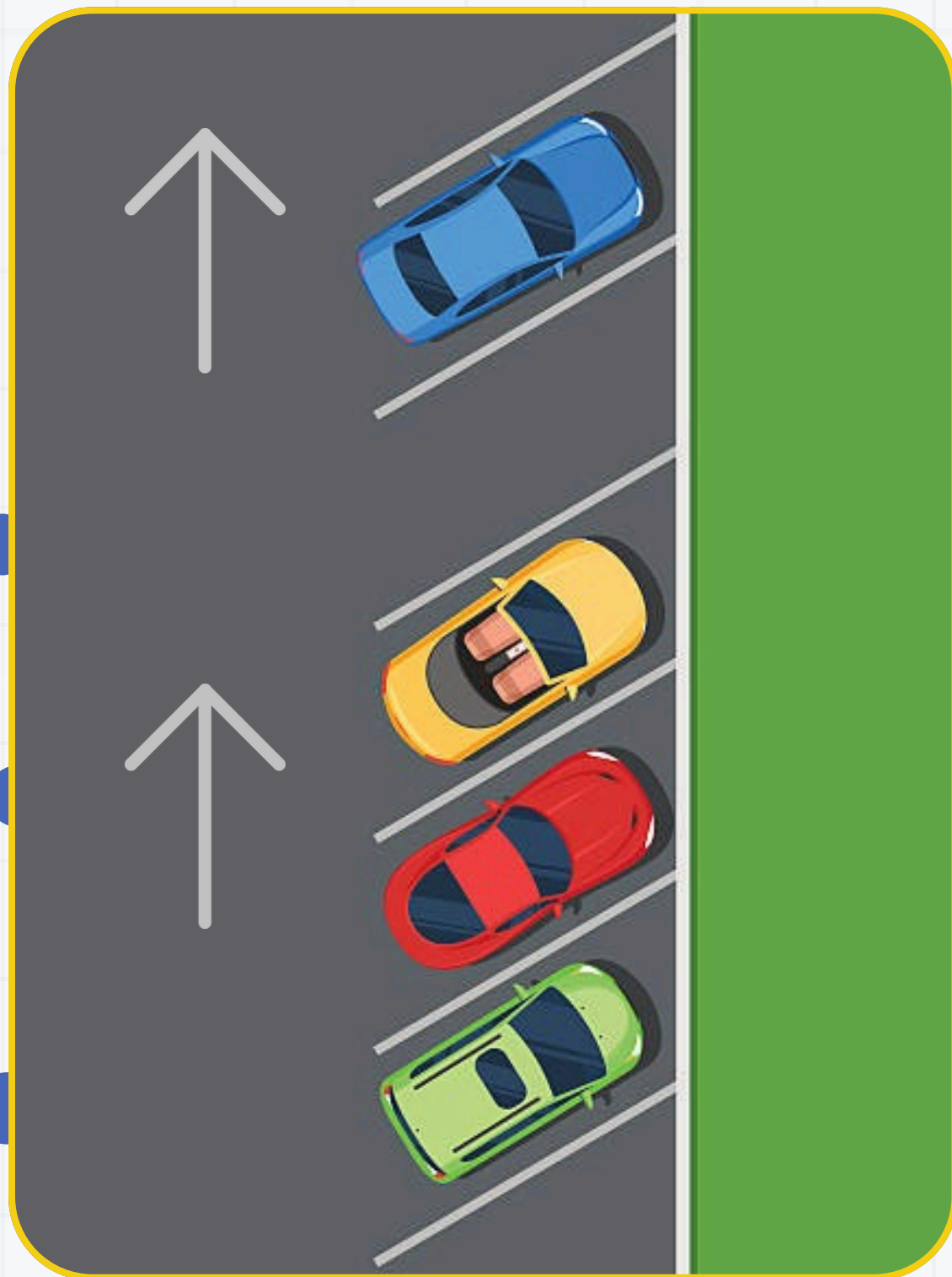


INSTITUT DE
MATHÉMATIQUES
JUSSIEU - PARIS
RIVE GAUCHE

π -Day, lycée Louis-le-Grand

Mars 2026



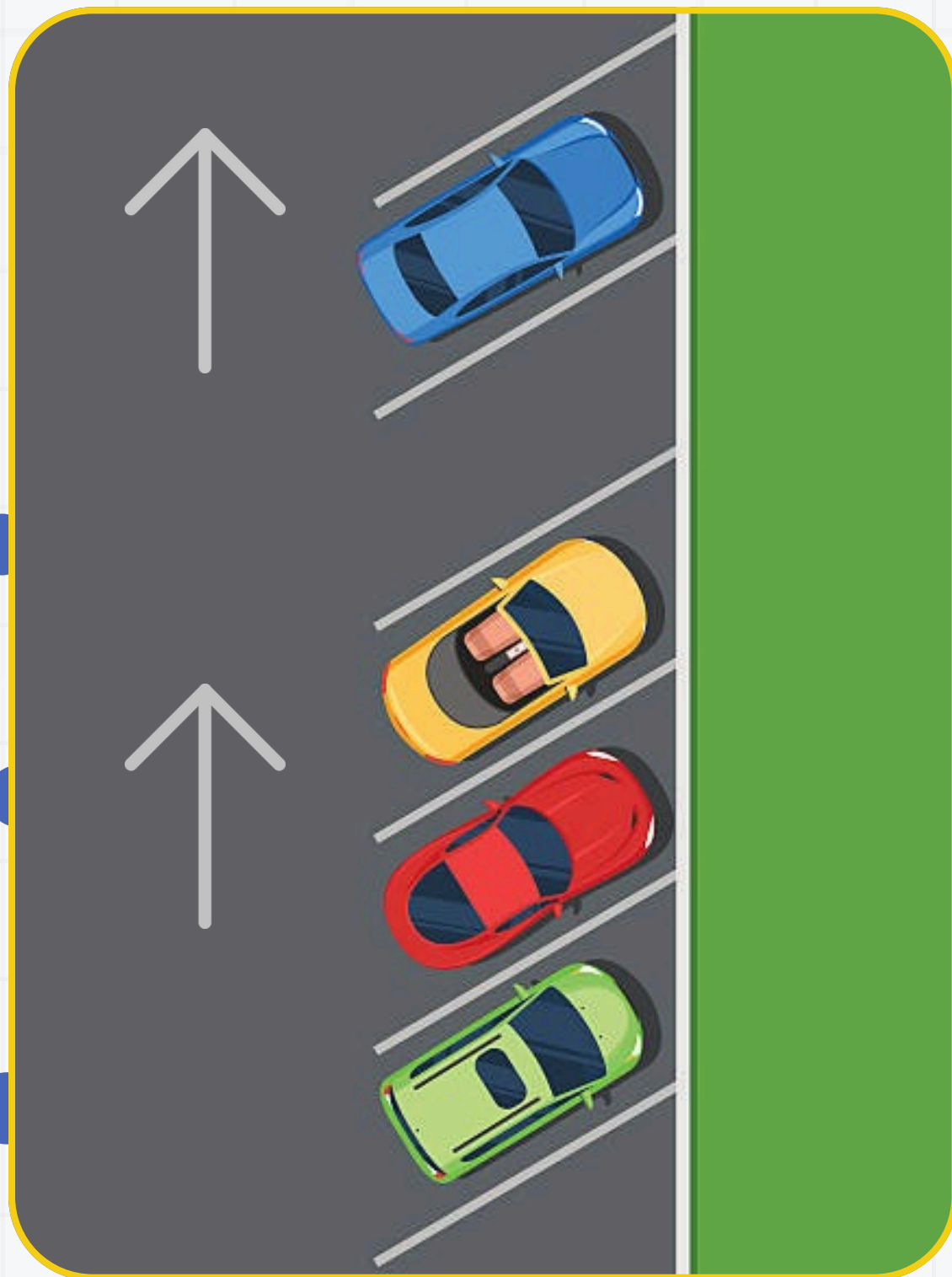


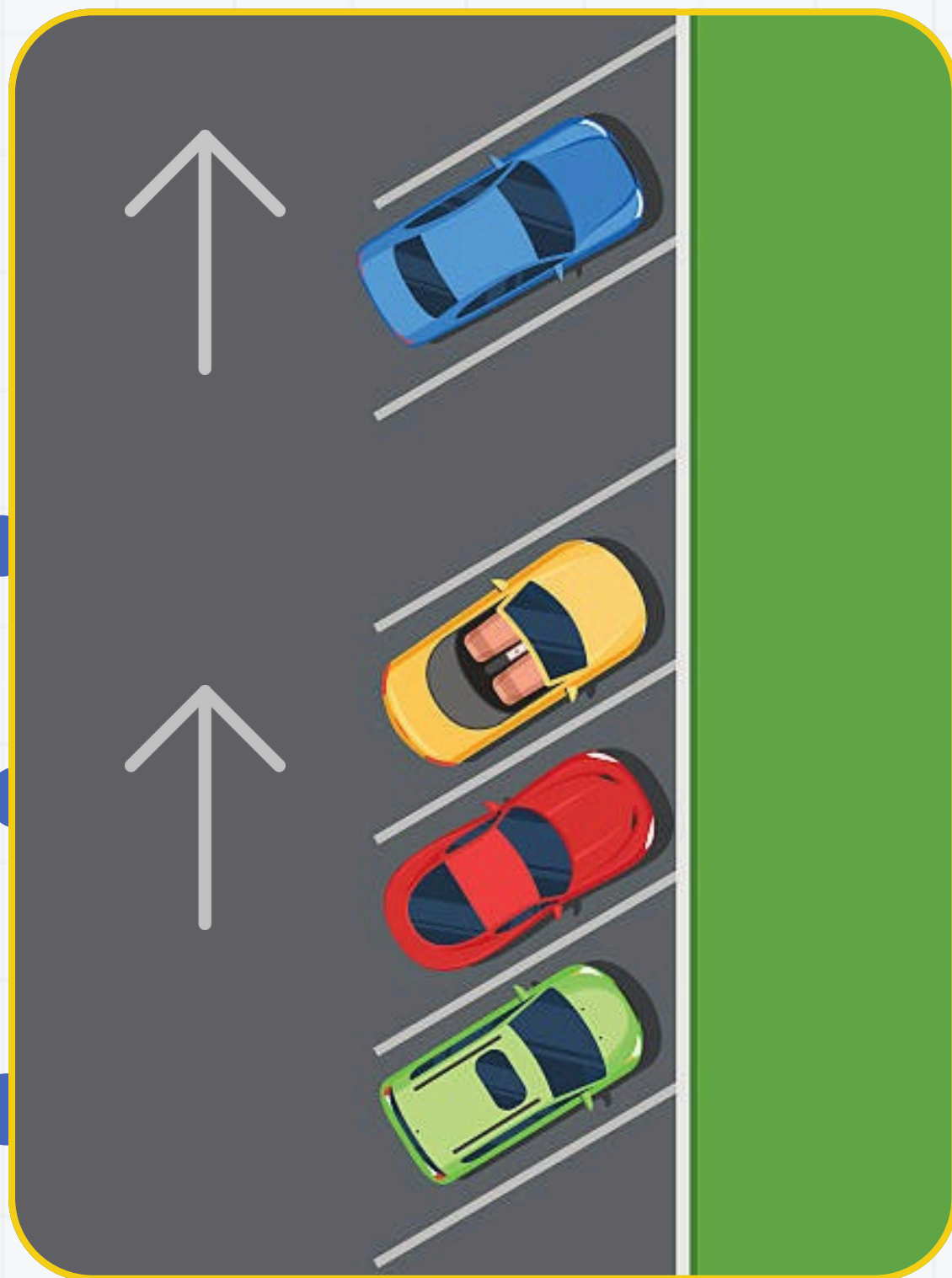
Contexte

- Une rue avec n places de parking alignées.

Contexte

- Une rue avec n places de parking alignées.
- n voitures arrivent une par une, chacune avec une place préférée.



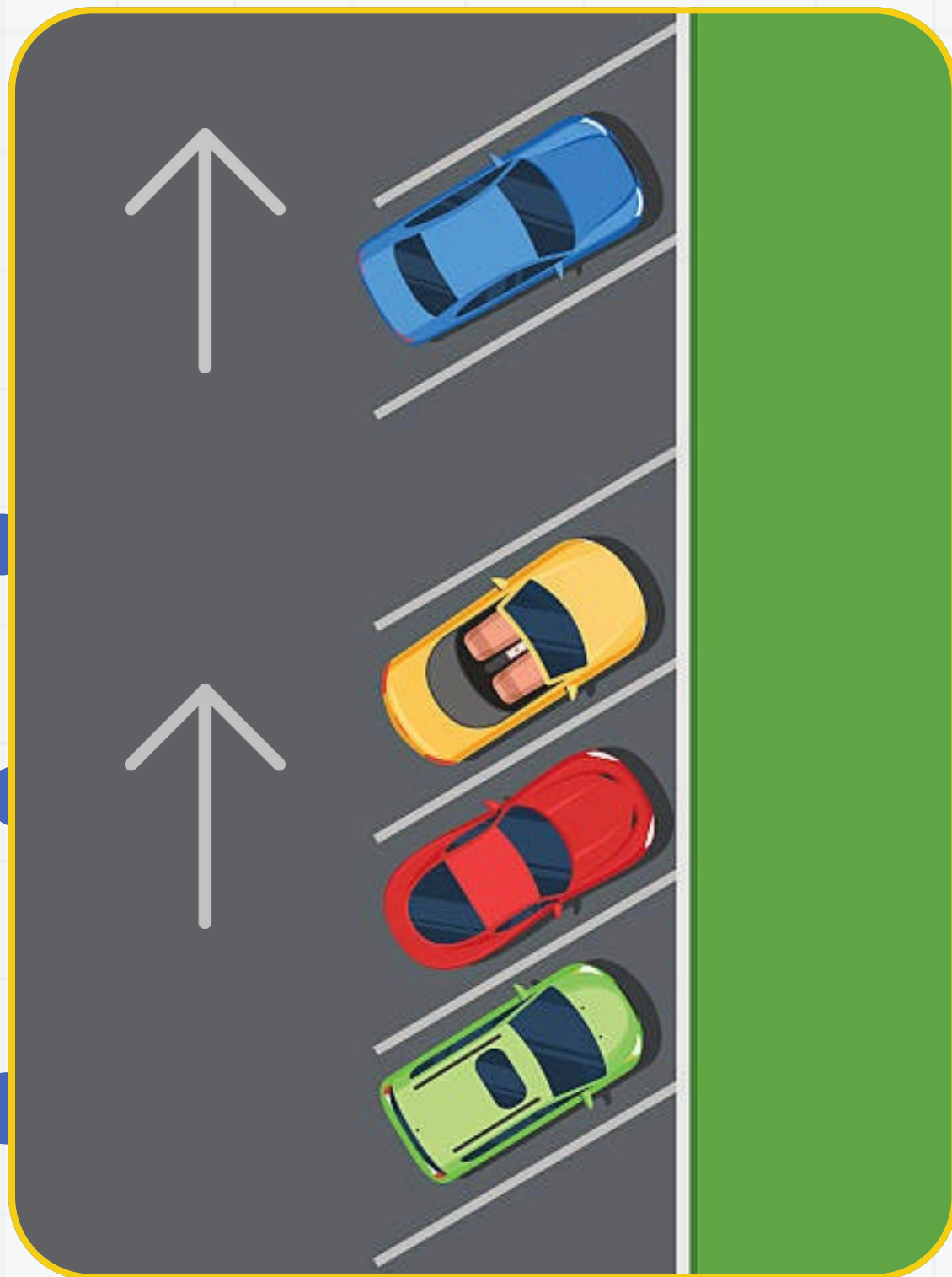


Contexte

- Une rue avec n places de parking alignées.
- n voitures arrivent une par une, chacune avec une place préférée.
- Si la place est libre \rightarrow la voiture s'y gare.

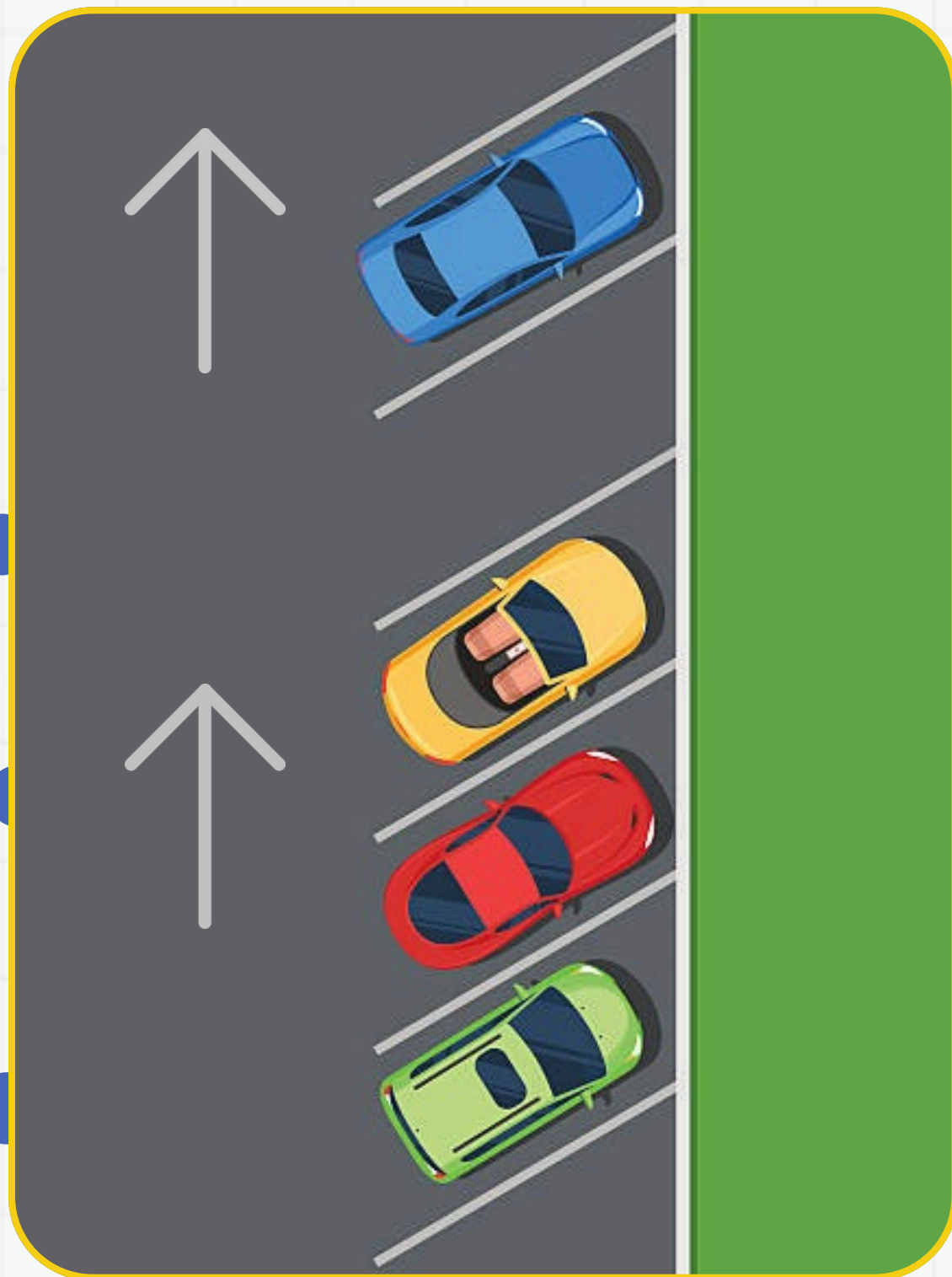
Contexte

- Une rue avec n places de parking alignées.
- n voitures arrivent une par une, chacune avec une place préférée.
- Si la place est libre \rightarrow la voiture s'y gare.
- Sinon \rightarrow elle avance jusqu'à la première place libre.



Contexte

- Une rue avec n places de parking alignées.
- n voitures arrivent une par une, chacune avec une place préférée.
- Si la place est libre \rightarrow la voiture s'y gare.
- Sinon \rightarrow elle avance jusqu'à la première place libre.
- Si toutes les voitures réussissent à se garer, la liste des préférences est appelée fonction de parking.



Examples



3



3



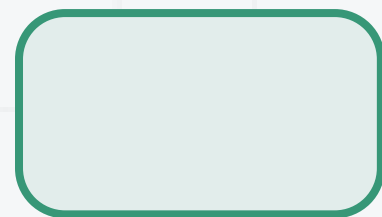
1



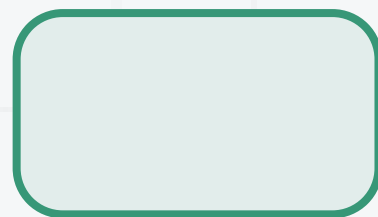
1



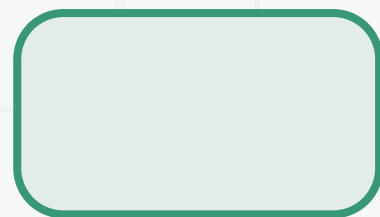
2



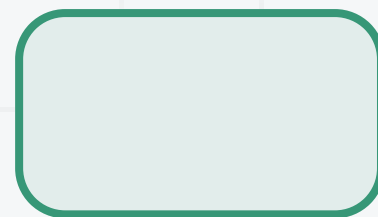
1



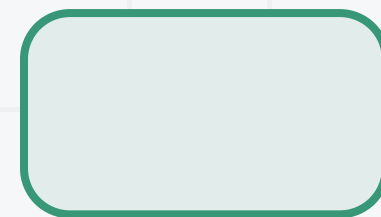
2



3



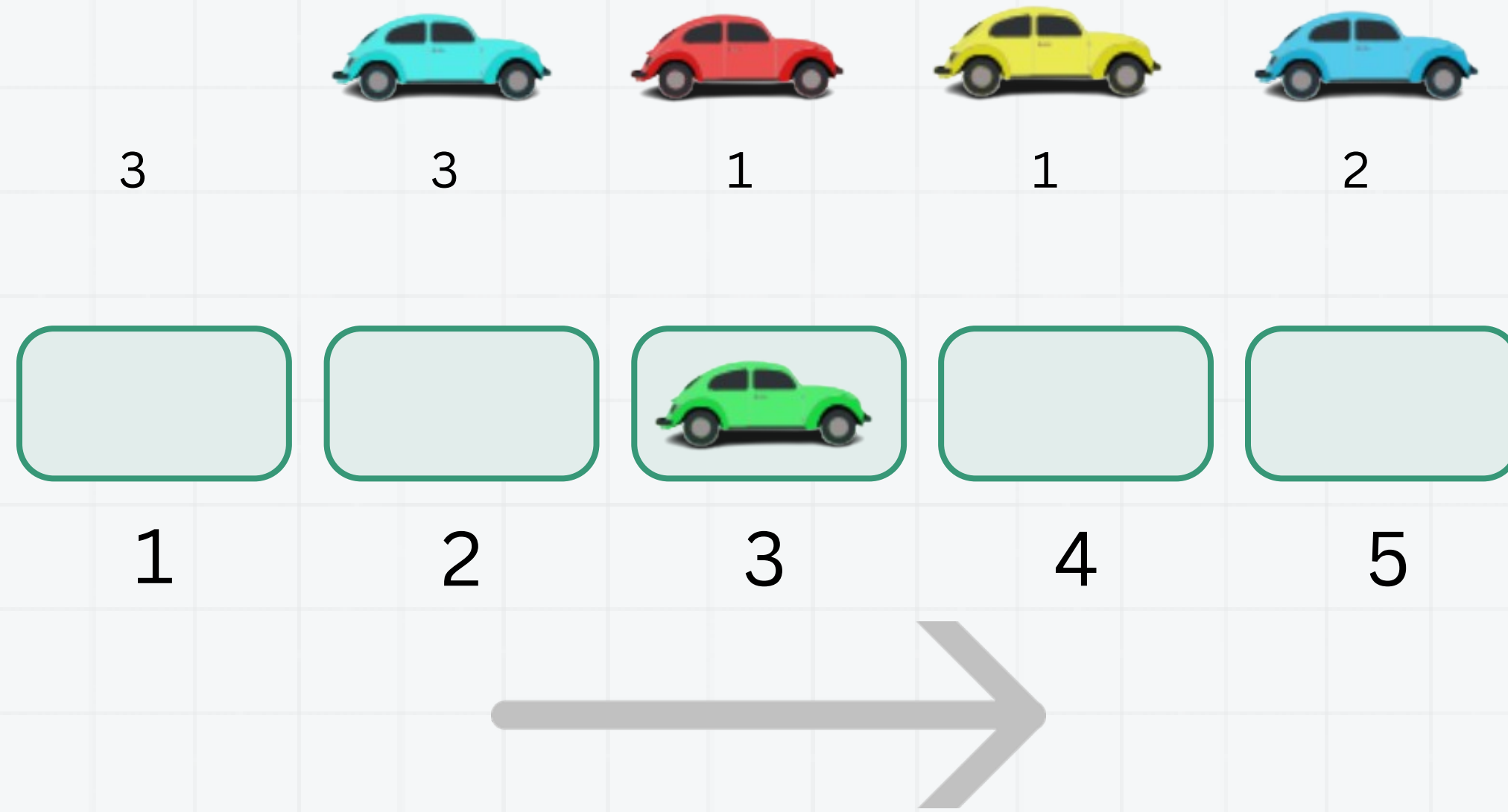
4



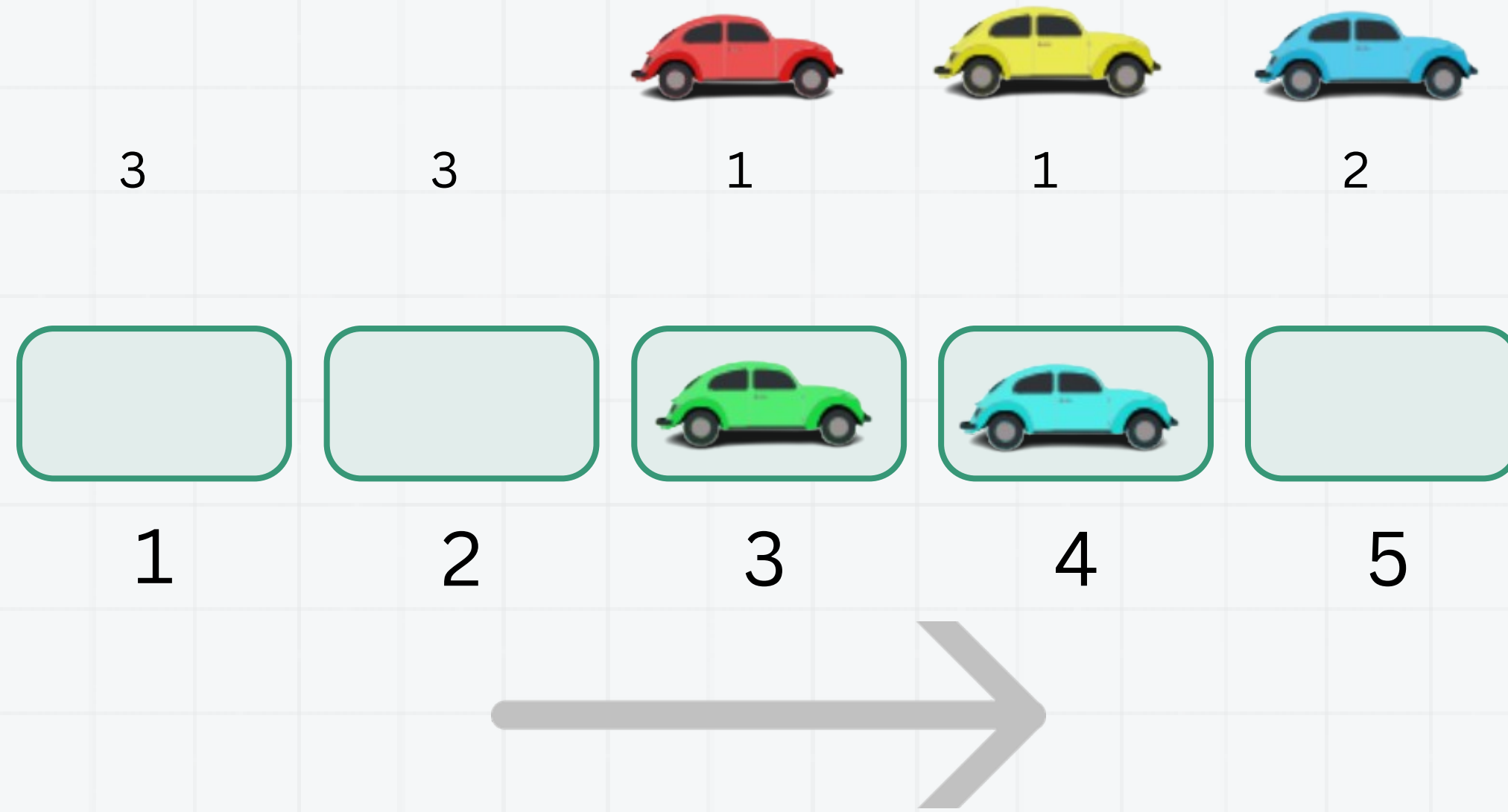
5



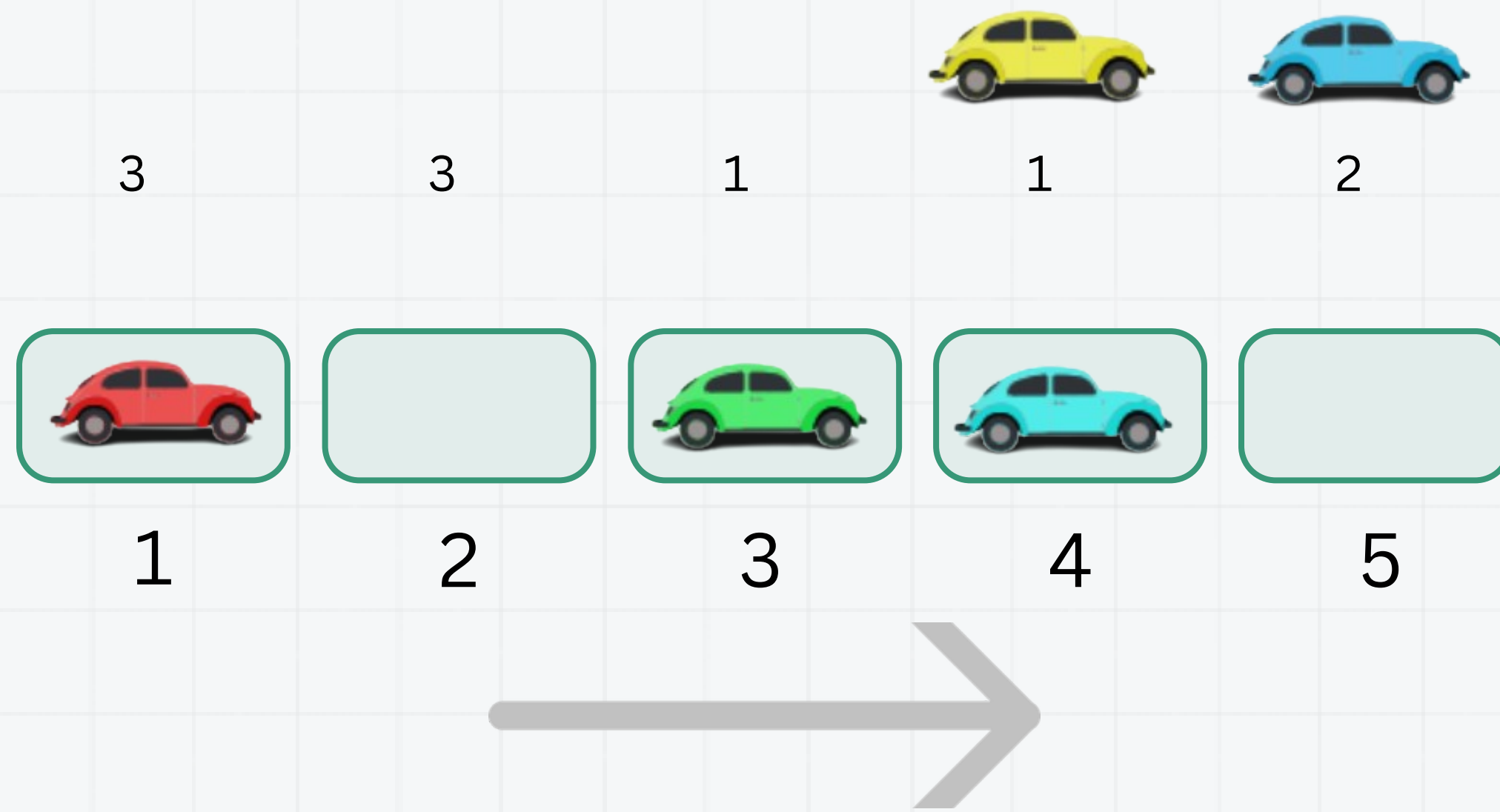
Examples



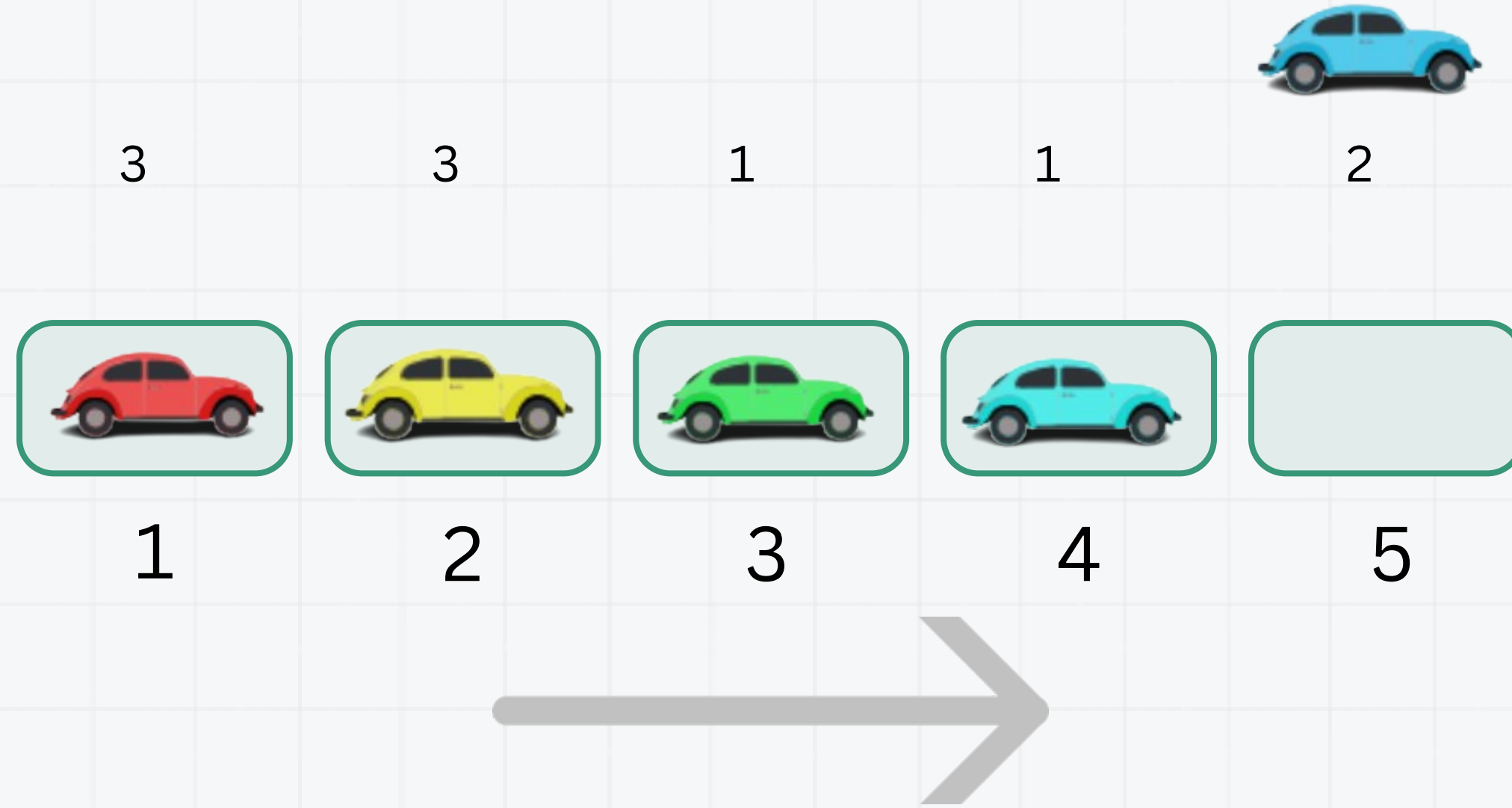
Examples



Examples



Examples



Examples



Exemples

La séquence

3 3 1 1 2

est une **fonction de parking**.

Examples



3



4



3



3



2



1



2



3



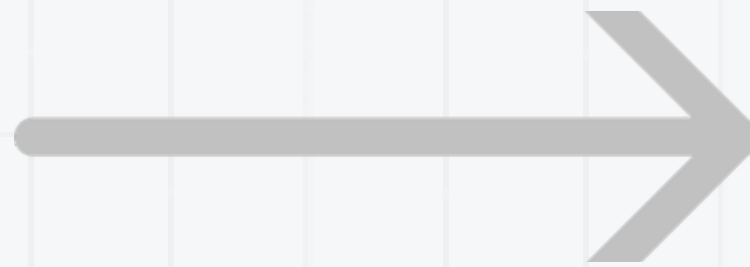
4



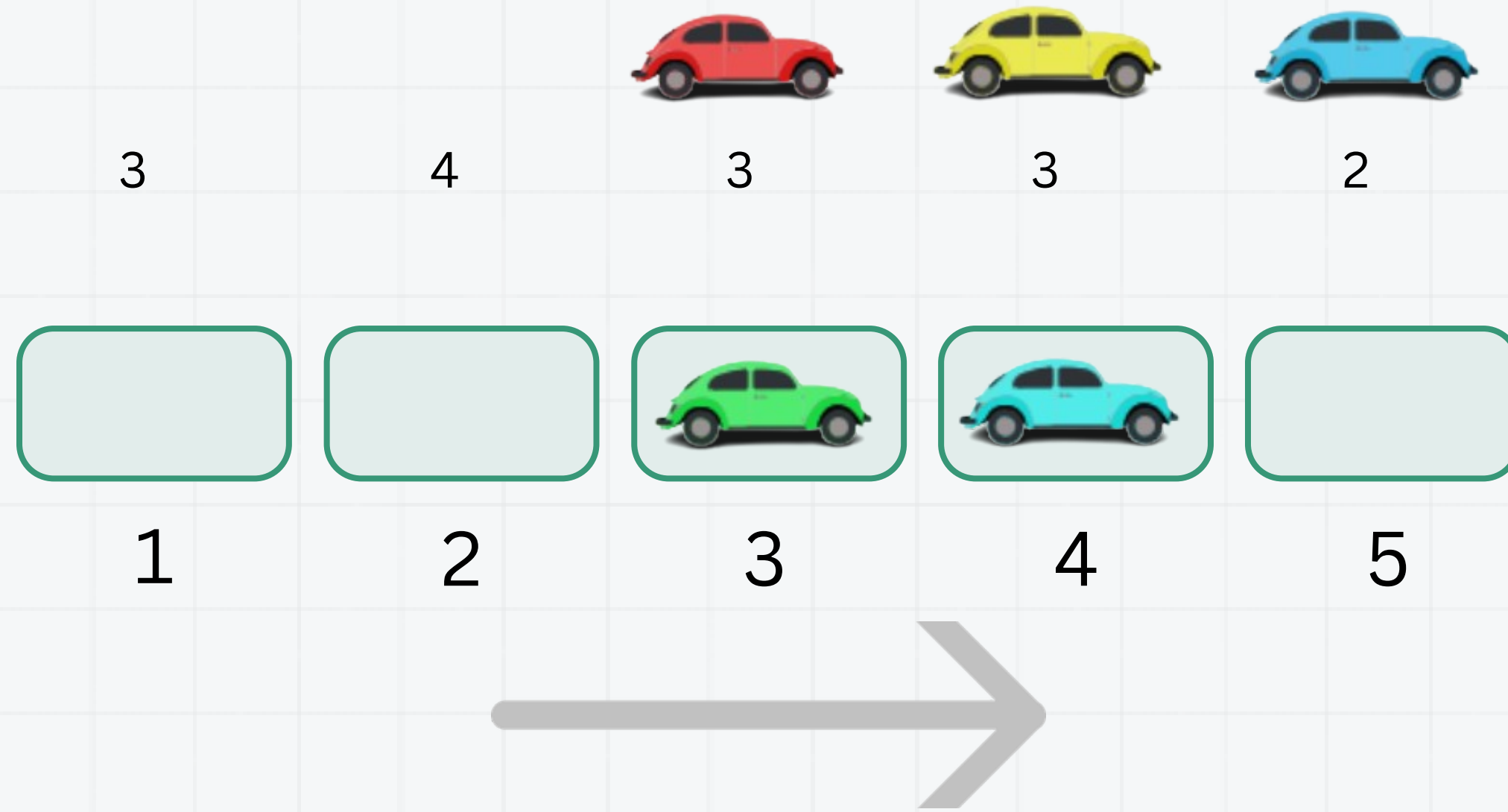
5



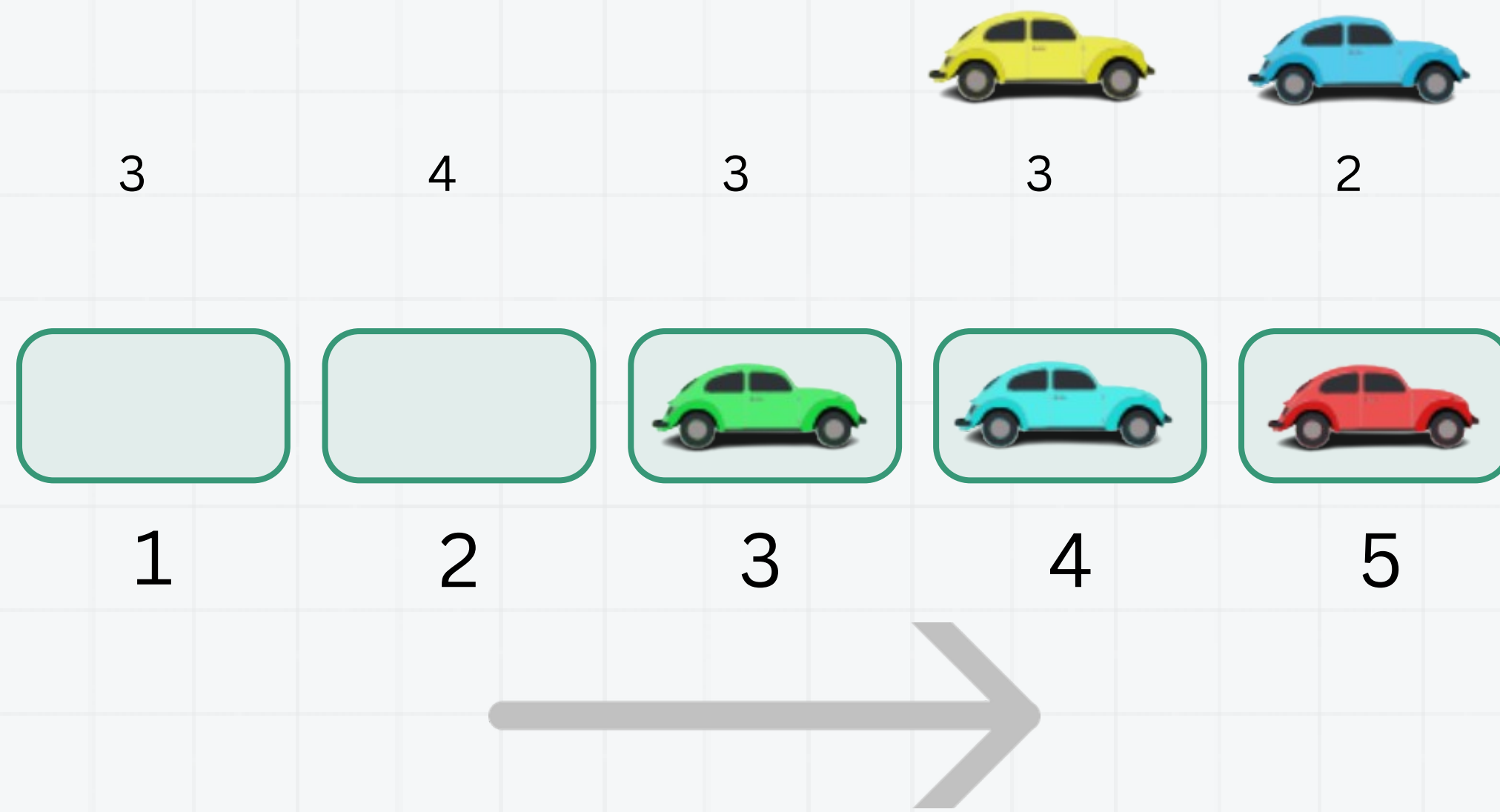
Examples



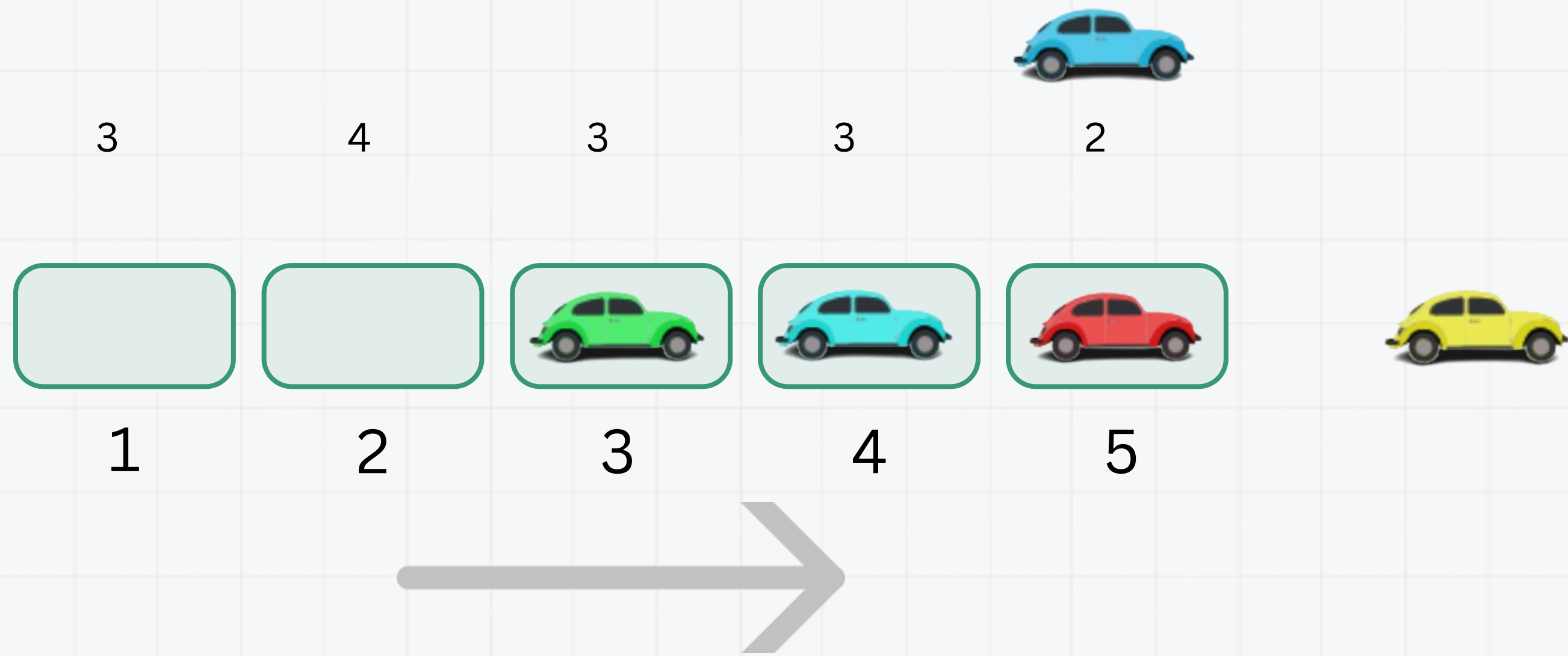
Examples



Examples



Examples



Exemples

La séquence

3 4 3 3 2

n'est **pas** une fonction de parking.



Plus d'exemples

- Est-ce que $(1,1,\dots,1)$ est une fonction de parking?





Plus d'exemples

- Est-ce que $(1,1,\dots,1)$ est une fonction de parking? **OUI**





Plus d'exemples

- Est-ce que $(1,1,\dots,1)$ est une fonction de parking? **OUI**
- S'il y a n places, combien de n au plus peut-il y avoir dans la liste de préférences?





Plus d'exemples

- Est-ce que $(1,1,\dots,1)$ est une fonction de parking? **OUI**
- S'il y a n places, combien de n au plus peut-il y avoir dans la liste de préférences?
Un seul, car sinon la deuxième voiture qui veut aller à la place n sortirait de la rue.





Plus d'exemples

- Combien de fonctions de parking telles que chaque voiture puisse se garer à sa place préférée?



Plus d'exemples

- Combien de fonctions de parking telles que chaque voiture puisse se garer à sa place préférée?

Solution: $n!$

Exemple: (1, 2, 3), (1, 3, 2) (3, 2, 1), (3, 1, 2)
(2, 1, 3), (2, 3, 1)

Un premier problème

Pour n places, combien y a-t-il de fonctions de parking?

1. On essaie sur des petits cas.
2. On essaie de poser une définition formelle.

Premiers cas

$n = 1$

$n = 2$

$n = 3$

Premiers cas

$$n = 1$$

(1)

$$n = 2$$

$$n = 3$$

Premiers cas

$$n = 1$$

(1)

$$n = 2$$

(1, 1), (1, 2), (2, 1)

$$n = 3$$

Premiers cas

$n = 1$

(1)

$n = 2$

(1, 1), (1, 2), (2, 1)

$n = 3$

(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 1)
(2, 1, 1), (1, 1, 3), (1, 3, 1)
(3, 1, 1), (1, 2, 2), (2, 1, 2)
(2, 2, 1), (1, 2, 3), (1, 3, 2)
(2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)
(3, 2, 1)

Premiers cas

$$n = 1$$

(1)

$$s = 1$$

$$n = 2$$

(1, 1), (1, 2), (2, 1)

$$s = 3$$

$$n = 3$$

(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 1)
(2, 1, 1), (1, 1, 3), (1, 3, 1)
(3, 1, 1), (1, 2, 2), (2, 1, 2)
(2, 2, 1), (1, 2, 3), (1, 3, 2)
(2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)
(3, 2, 1)

$$s = 16$$

Premiers cas

The OEIS is supported by [the many generous donors to the OEIS Foundation](#).

0 1 3 6 2 7
: : : : :
: : : : :
23 : : : : :
10 22 11 21

THE ON-LINE ENCYCLOPEDIA
OF INTEGER SEQUENCES®

founded in 1964 by N. J. A. Sloane

[Conseils](#)

(Salutations de [l'Encyclopédie en ligne des suites de nombres entiers](#))

Chercher: **seq:1,3,16**

Displaying 1-10 of 477 results found.

page 1 [2](#) [3](#) [4](#) [5](#) [6](#) [7](#) [8](#) [9](#) [10](#) ... [48](#)

Sort: [relevance](#) | [references](#) | [number](#) | [modified](#) | [created](#) Format: [long](#) | [short](#) | [data](#)

[A000272](#) Number of trees on n labeled nodes: $n^{(n-2)}$ with $a(0)=1$.

+30

368

(Formerly M3027 N1227)

1, 1, **1**, **3**, **16**, 125, 1296, 16807, 262144, 4782969, 100000000, 2357947691, 61917364224, 1792160394037, 56693912375296, 1946195068359375, 72057594037927936, 2862423051509815793, 121439531096594251776, 5480386857784802185939, 2621440000000000000000, 13248496640331026125580781

<https://oeis.org>

Premiers cas

The OEIS is supported by [the many generous donors to the OEIS Foundation](#).

0 1 3 6 2 7
: : : : :
: : : : :
23 13 20
10 22 11 21

THE ON-LINE ENCYCLOPEDIA
OF INTEGER SEQUENCES®

founded in 1964 by N. J. A. Sloane

1,3,16

(Salutations de [l'Encyclopédie en ligne des suites de nombres entiers](#))

Chercher: **seq:1,3,16**

Displaying 1-10 of 477 results found. page 1 [2](#) [3](#) [4](#) [5](#) [6](#) [7](#) [8](#) [9](#) [10](#) ... [48](#)

Sort: [relevance](#) | [references](#) | [number](#) | [modified](#) | [created](#) Format: [long](#) | [short](#) | [data](#)

[A000272](#) Number of trees on n labeled nodes: $n^{(n-2)}$ with $a(0)=1$. +30
368
(Formerly M3027 N1227)

1, 1, **1**, **3**, **16**, 125, 1296, 16807, 262144, 4782969, 100000000, 2357947691, 61917364224, 1792160394037, 56693912375296, 1946195068359375, 72057594037927936, 2862423051509815793, 121439531096594251776, 5480386857784802185939, 2621440000000000000000, 13248496640331026125580781

Idée: $(n + 1)^{n-1}$

<https://oeis.org>

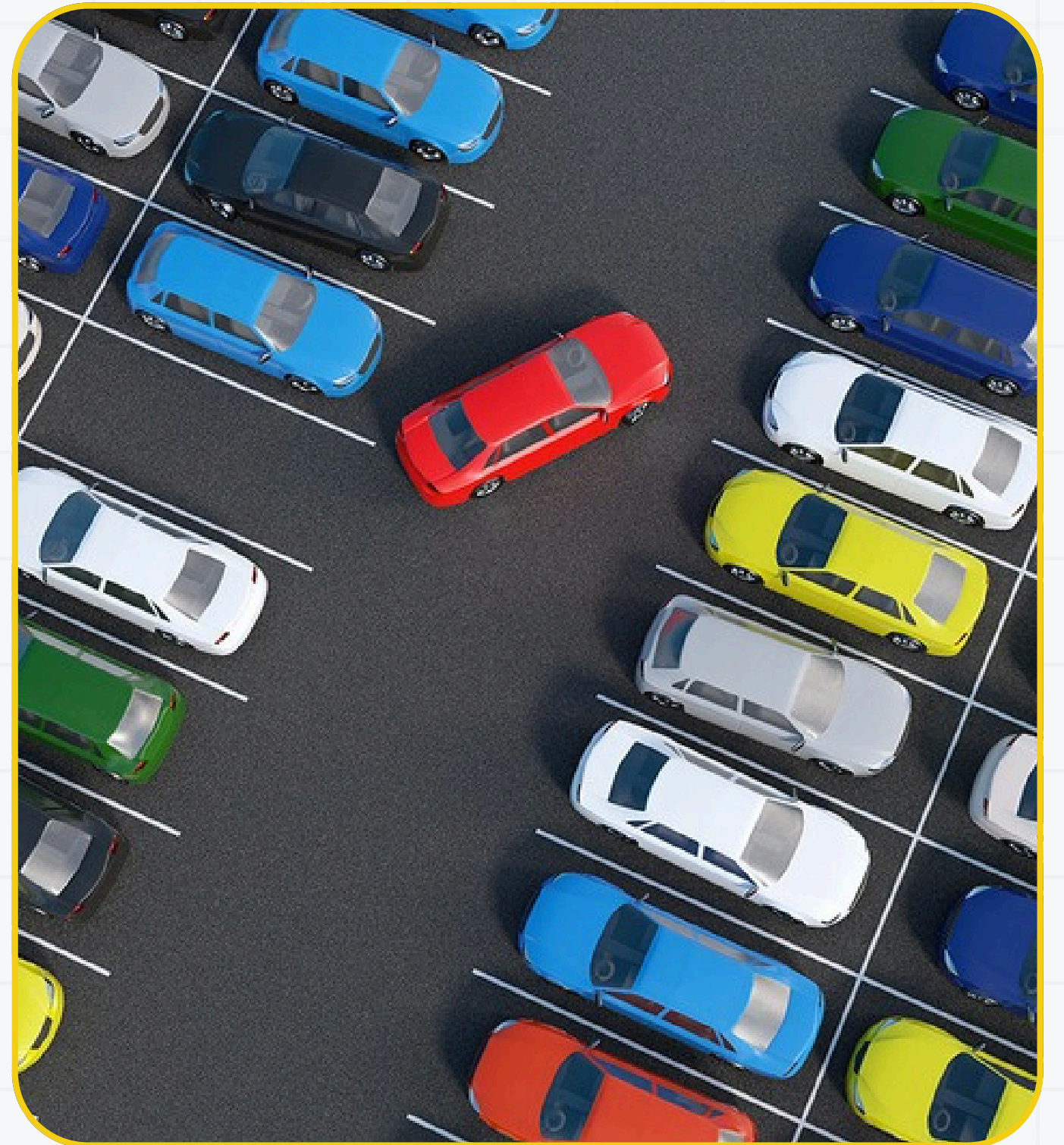
Définition

Soit n un entier et $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ une suite d'entiers compris entre 1 et n .

Soit $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ le réarrangement de α dans l'ordre croissant.

La séquence α est une **fonction de parking** ssi

pour tout $i, b_i \leq i$.

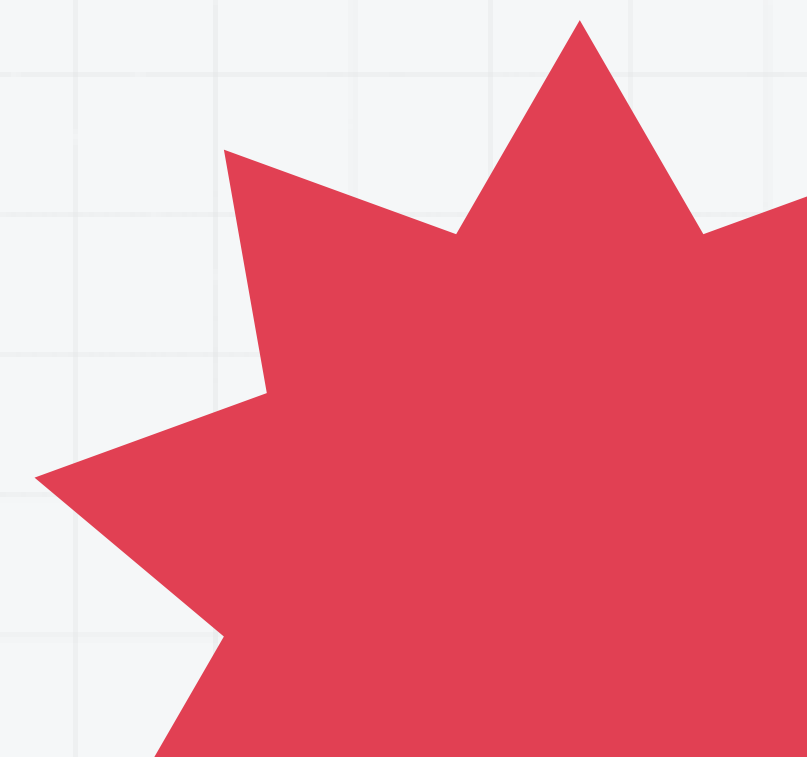


Théorème

*Pyke, 1959, Konheim et Weiss, 1966,
Riordan, 1969*

Si on note PF_n l'ensemble des fonctions de parking à n voitures, on a:

$$|PF_n| = (n + 1)^{n-1}$$

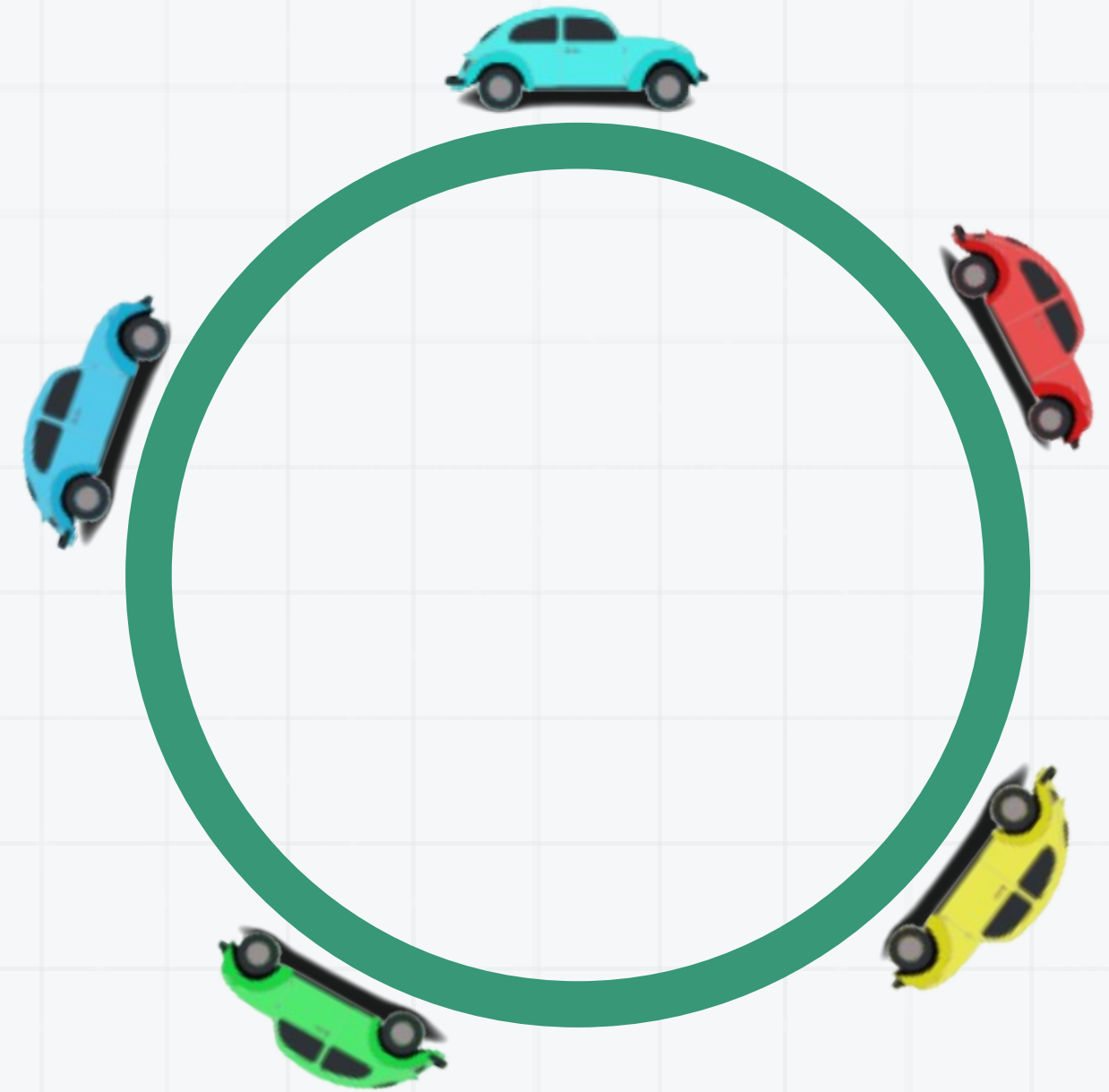


Preuve

On suppose maintenant que les n voitures peuvent choisir parmi $n + 1$ places de parking. Il y a donc

$$(n + 1)^n$$

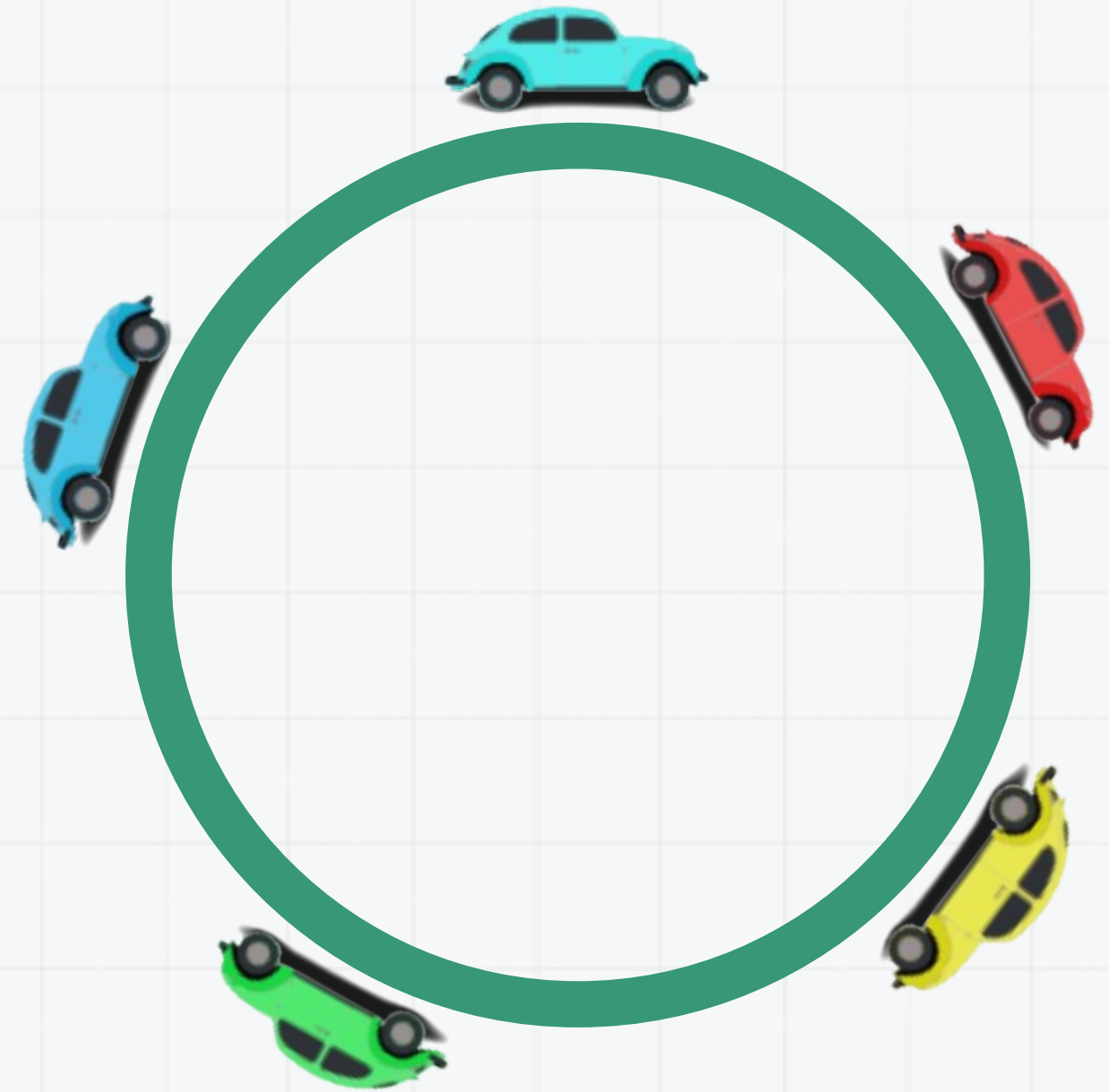
séquences de préférences possibles.



Preuve

$(n + 1)^n$ séquences de préférences possibles.

Les voitures tournent autour d'un cercle, donc peuvent revenir au point de départ. **Donc toutes les voitures trouveront une place.**

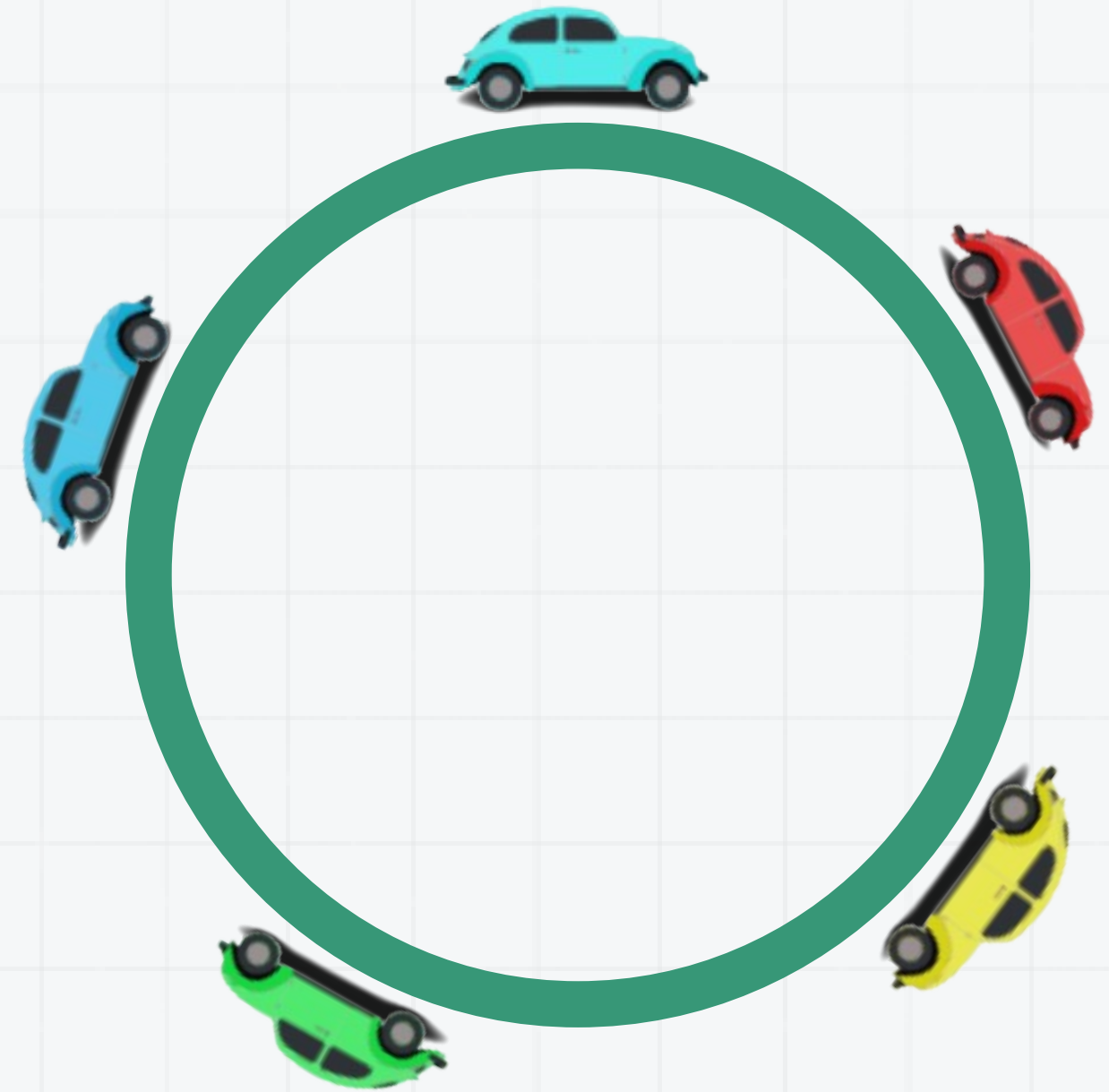


Preuve

$(n + 1)^n$ séquences de préférences possibles.

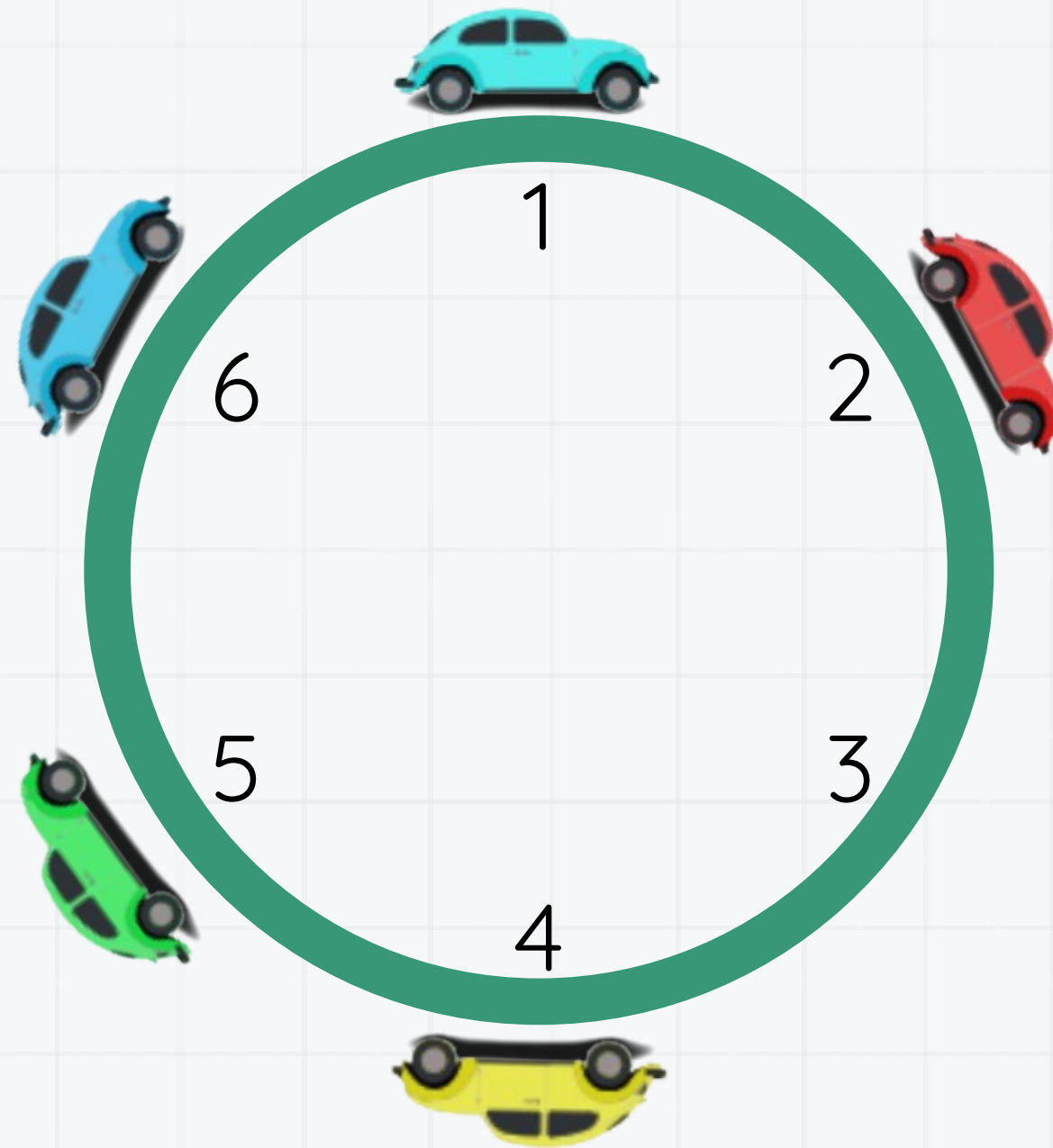
Les voitures tournent autour d'un cercle, donc peuvent revenir au point de départ. **Donc toutes les voitures trouveront une place.**

+ il y aura toujours une place libre.

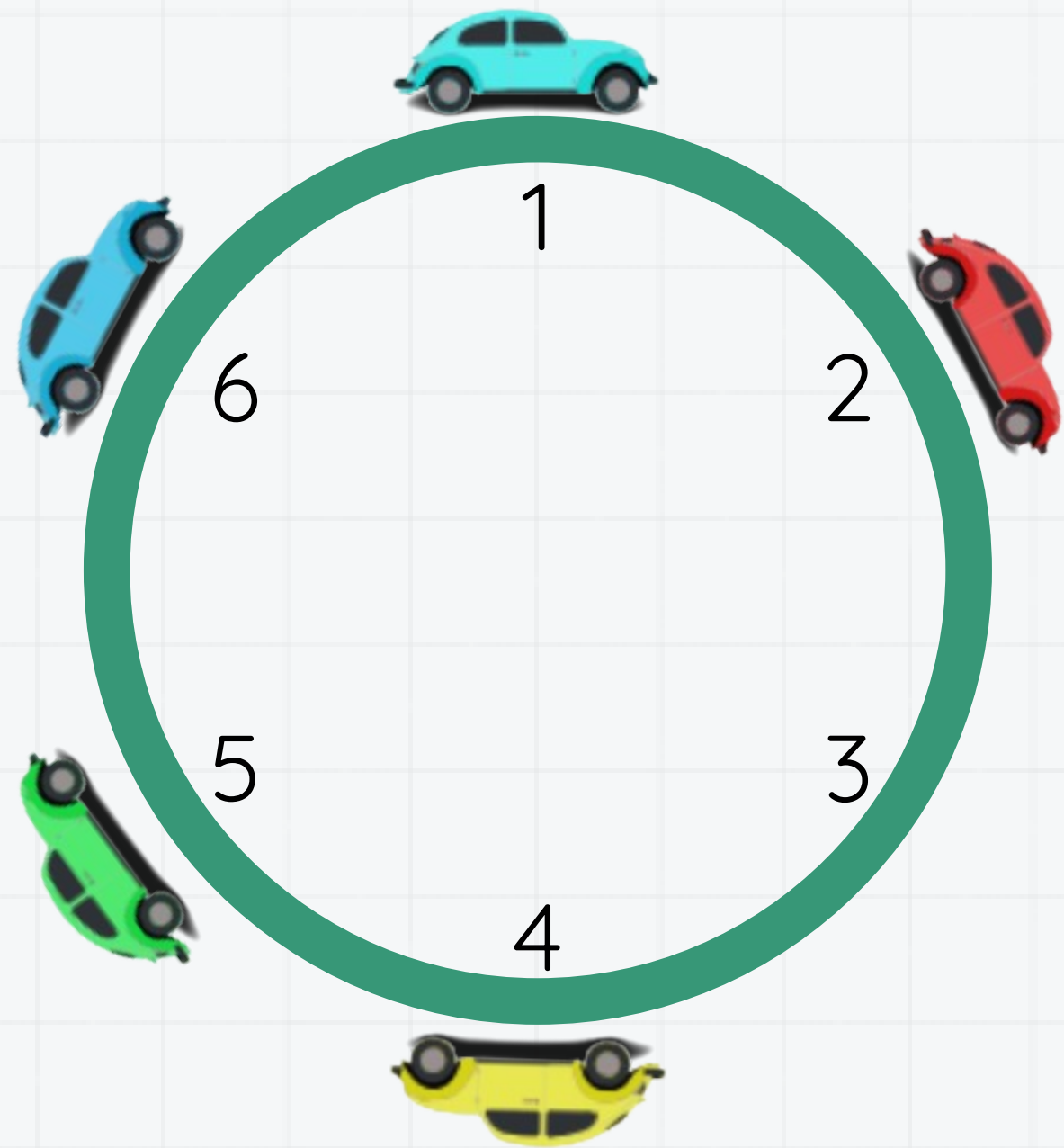


Preuve

1 2 4 4 5

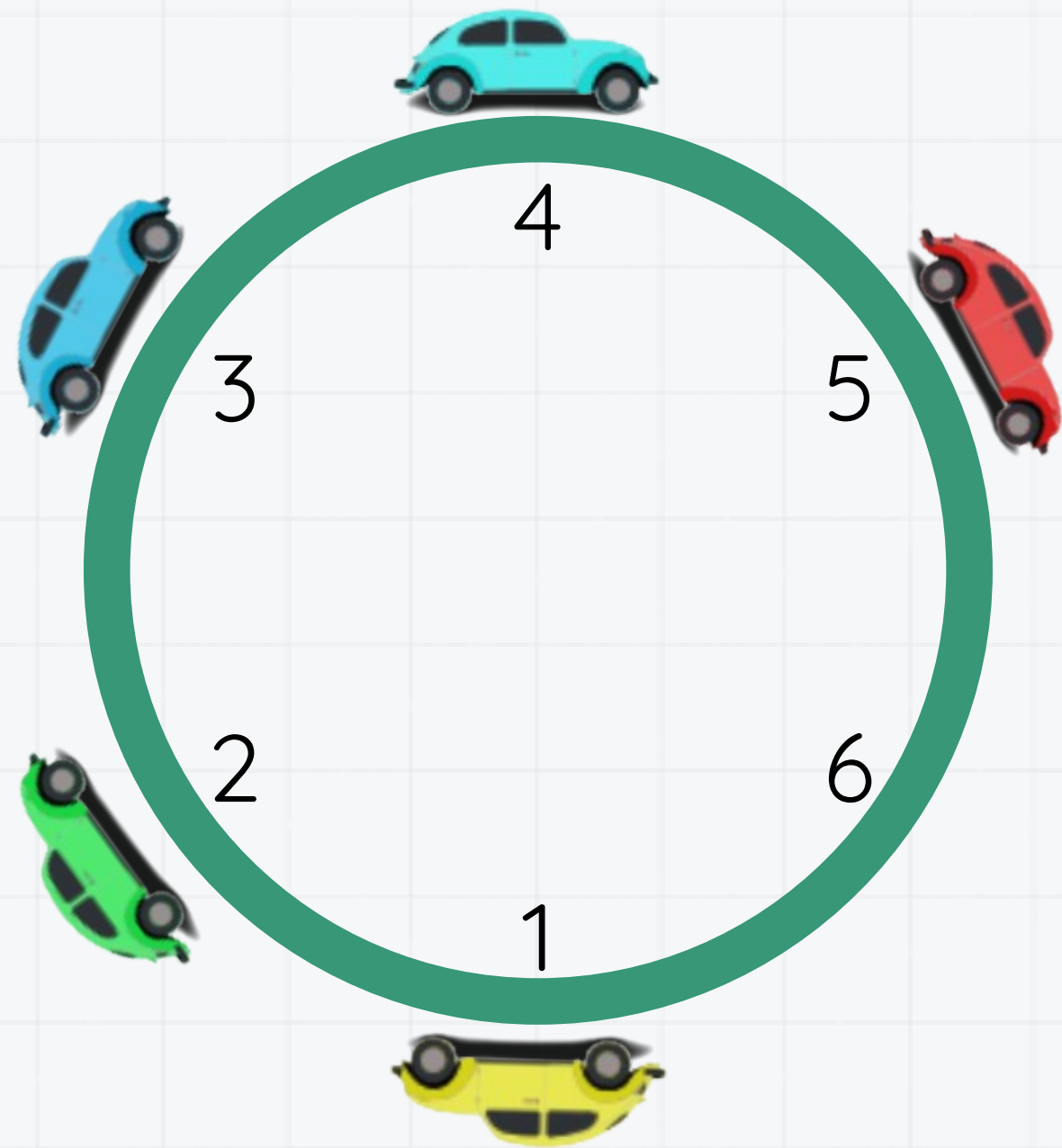


Preuve



La séquence est une fonction de parking ssi la place $n + 1$ est libre.

Preuve

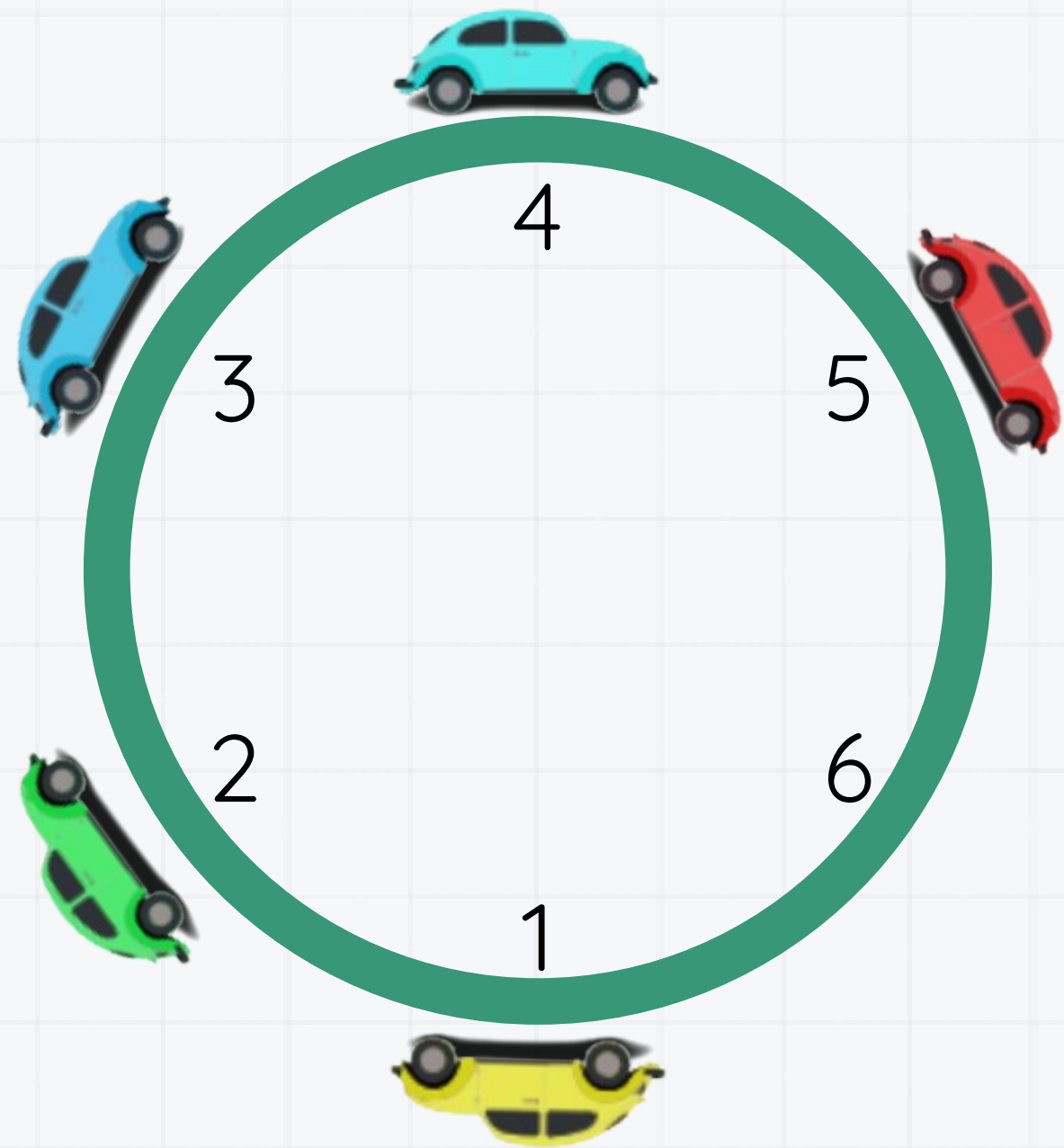


La séquence est une fonction de parking ssi la place $n + 1$ est libre.

Séquence: $1+3, 2+3, 4+3, 4+3, 5+3 \pmod 6$.

C.a.d: 4 5 1 1 2

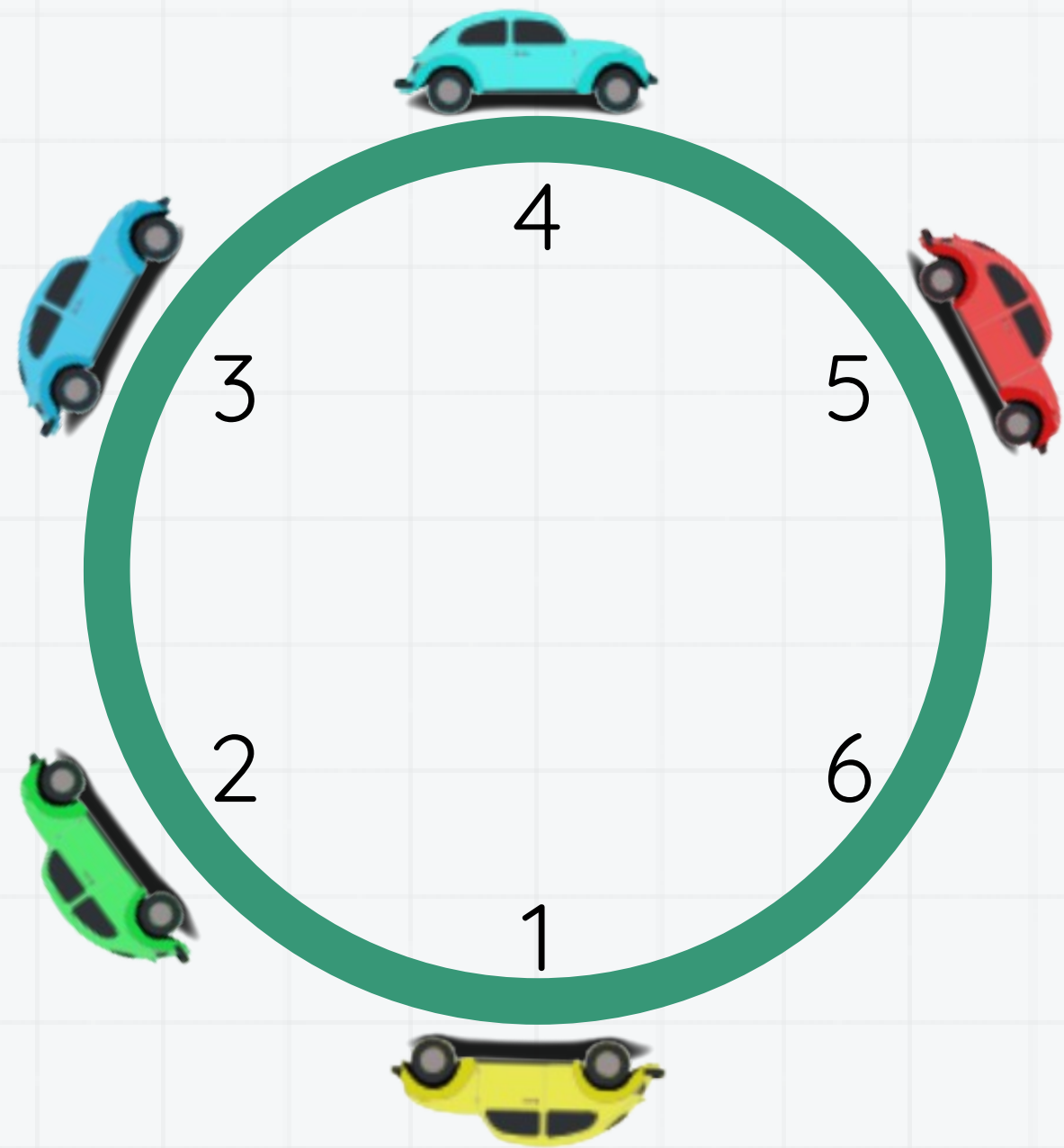
Preuve



$n + 1$ rotations possibles, mais une unique forme une fonction de parking.

On peut grouper les séquences de préférences quand elles sont égales à rotation près: paquets de $n + 1$ séquences.

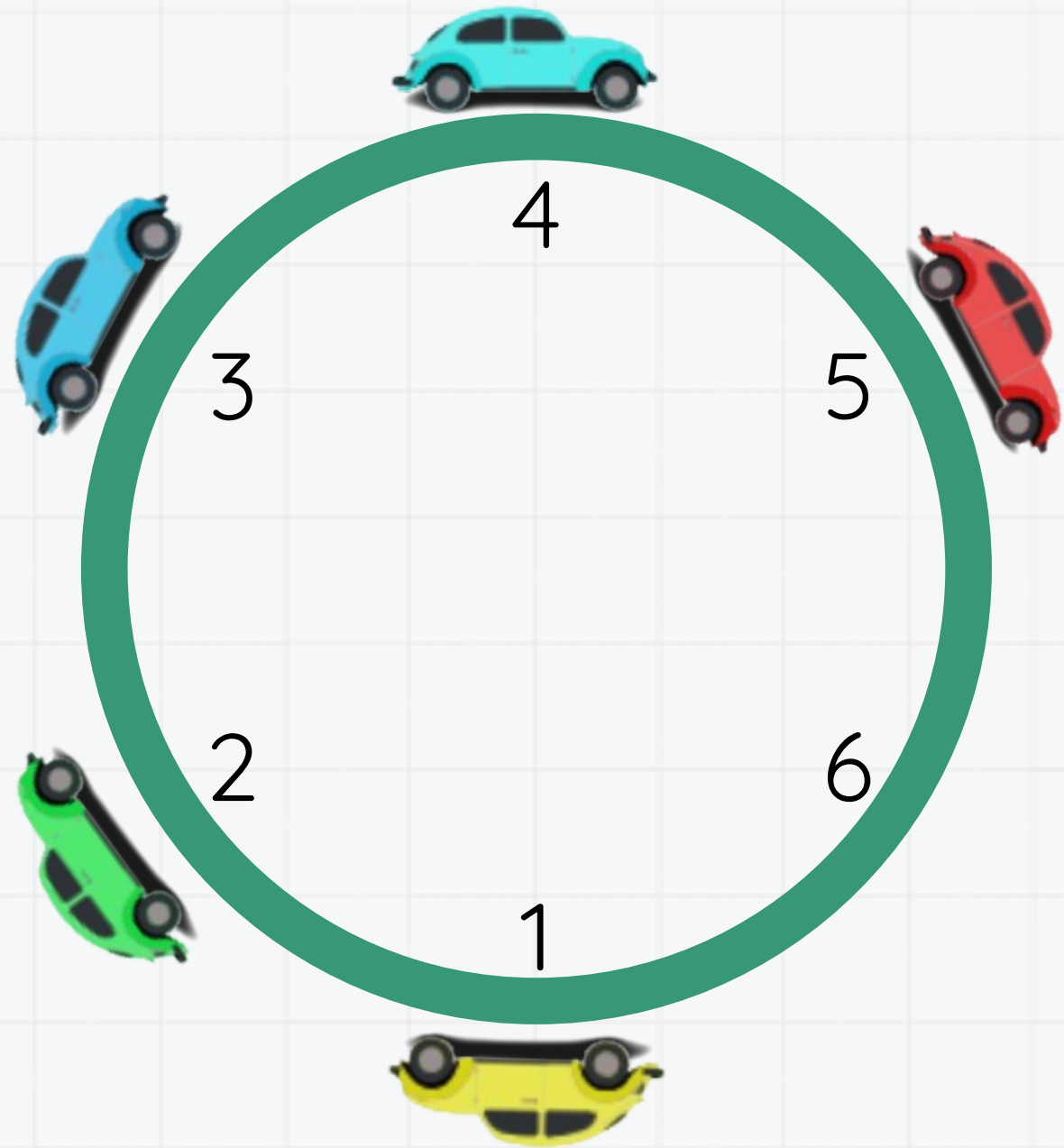
Preuve



On peut grouper les séquences de préférences quand elles sont égales à rotation près: paquets de $n + 1$ séquences.

Par paquet, il n'y en a que un qui forme une fonction de parking.

Preuve



On obtient:

$$\frac{(n + 1)^n}{n + 1} = (n + 1)^{n-1}$$

fonctions de parking possibles.

Connexions

Théorème (Cayley' formula):

Le nombre d'arbres enracinées à $n + 1$ sommets est égal à:

$$(n + 1)^{n-1}$$

Connexions

Théorème (Cayley' formula):

Le nombre d'arbres enracinées à $n + 1$ sommets est égal à:

$$(n + 1)^{n-1}$$

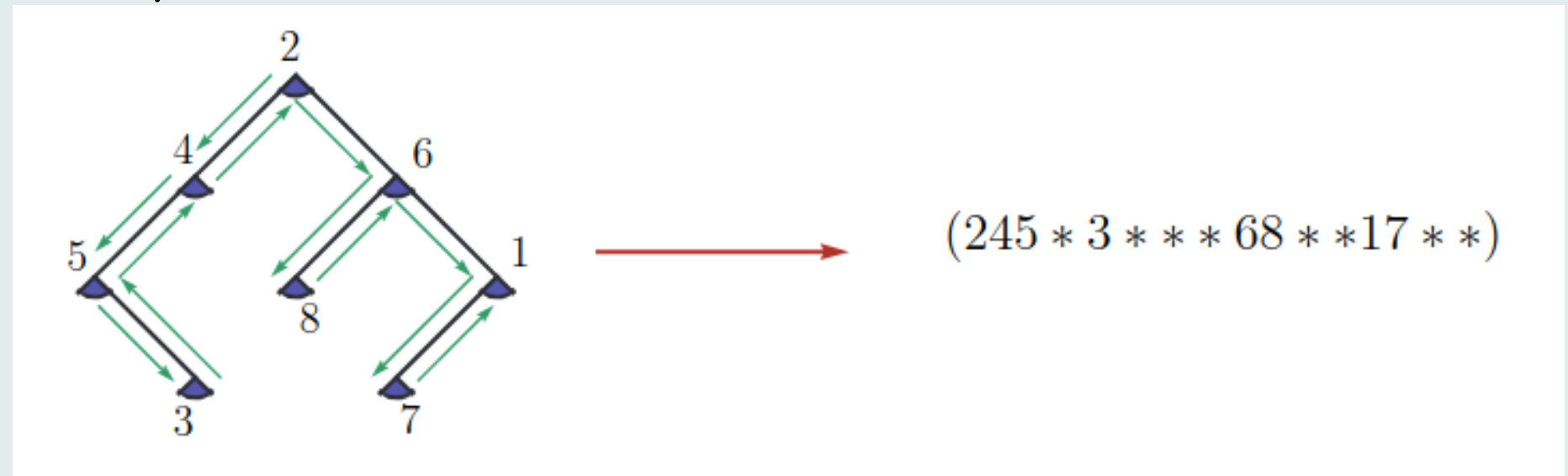
Théorème (Kreweras, 1972):

Le nombre de chaînes maximales d'une partition non-croisée $\{1, \dots, n + 1\}$ est égal à:

$$(n + 1)^{n-1}$$

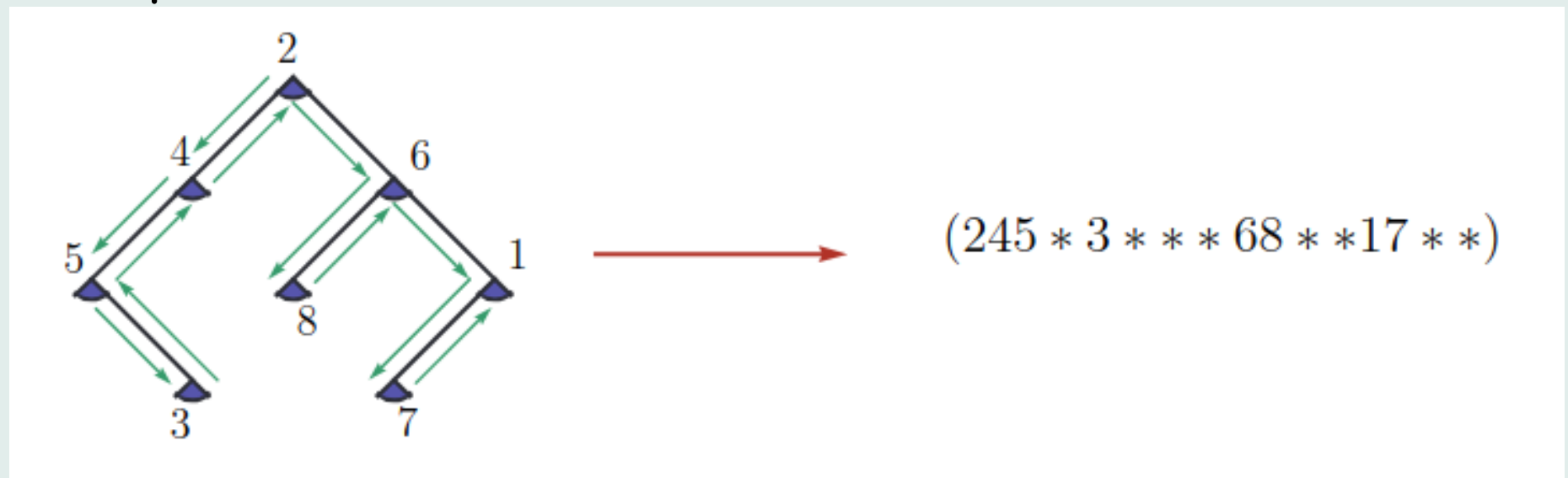
Bijection

Etape 1:

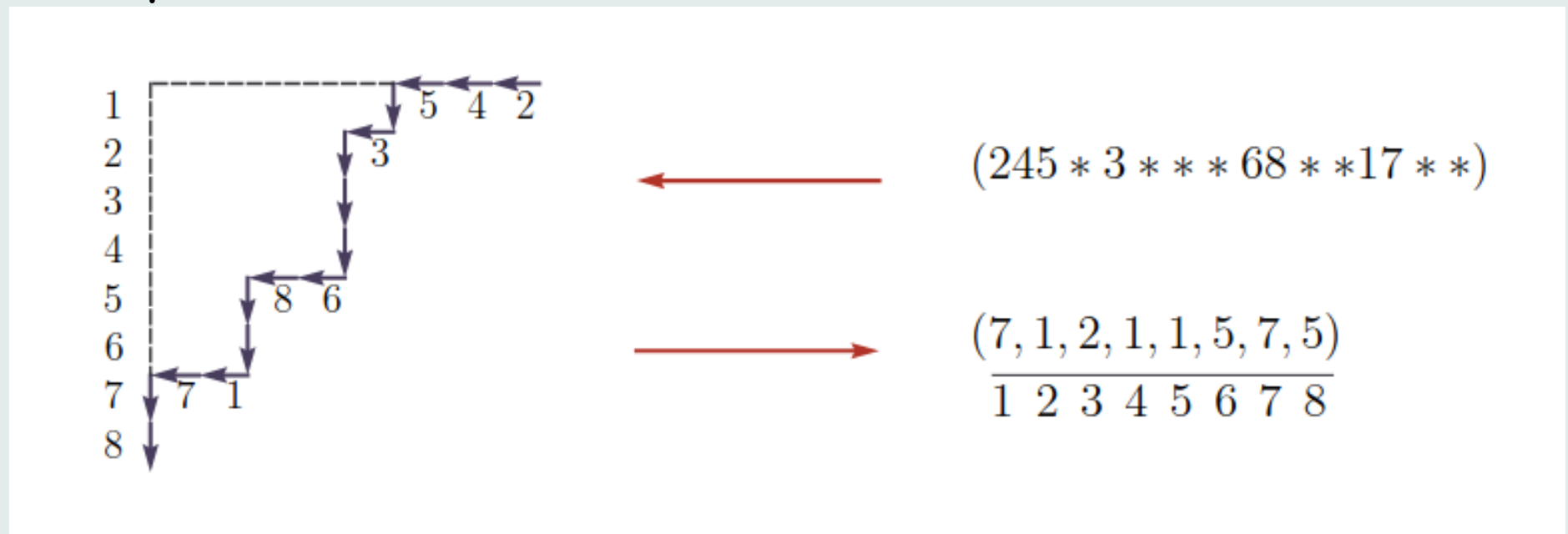


Bijection

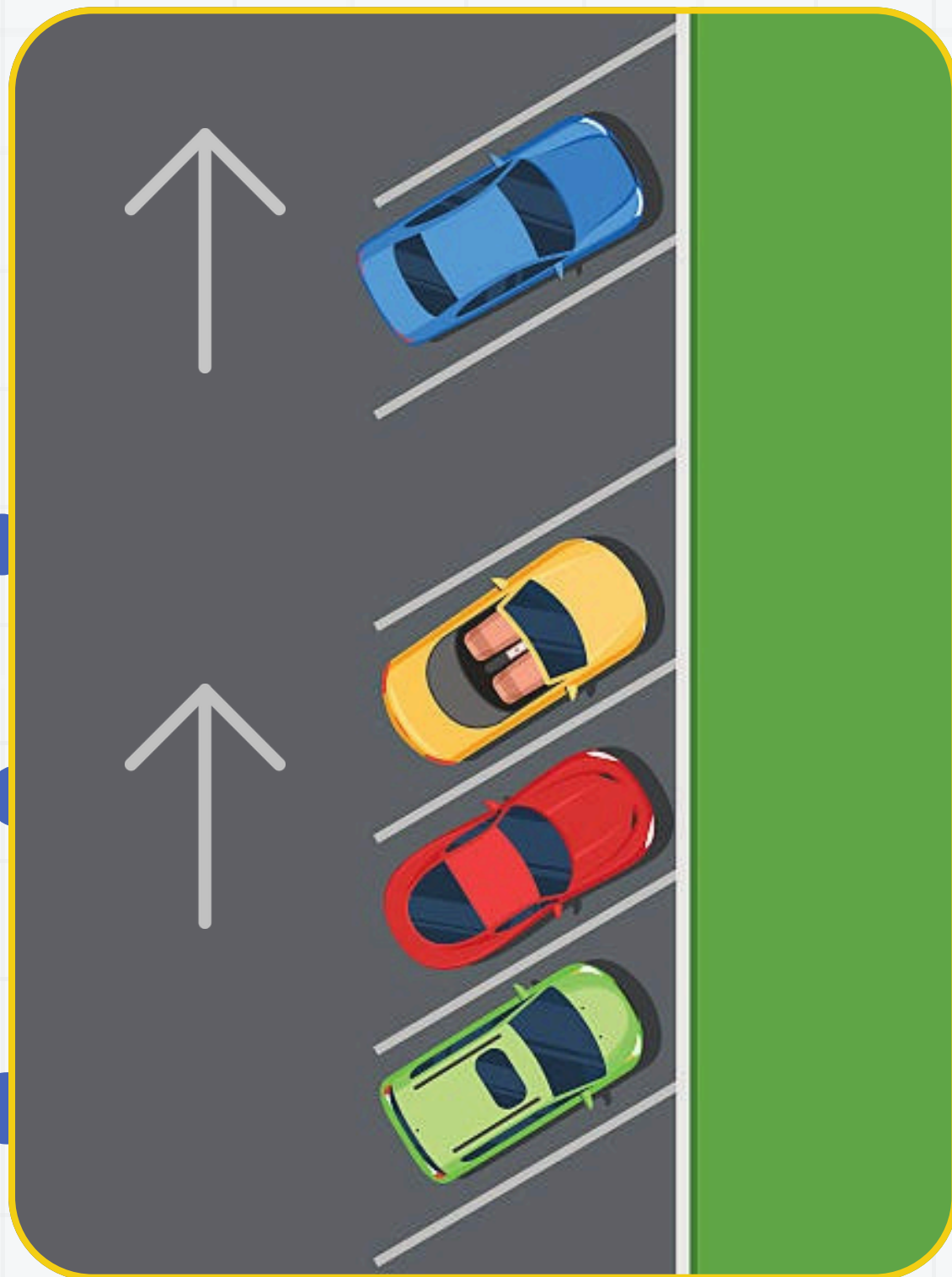
Etape 1:



Etape 2:



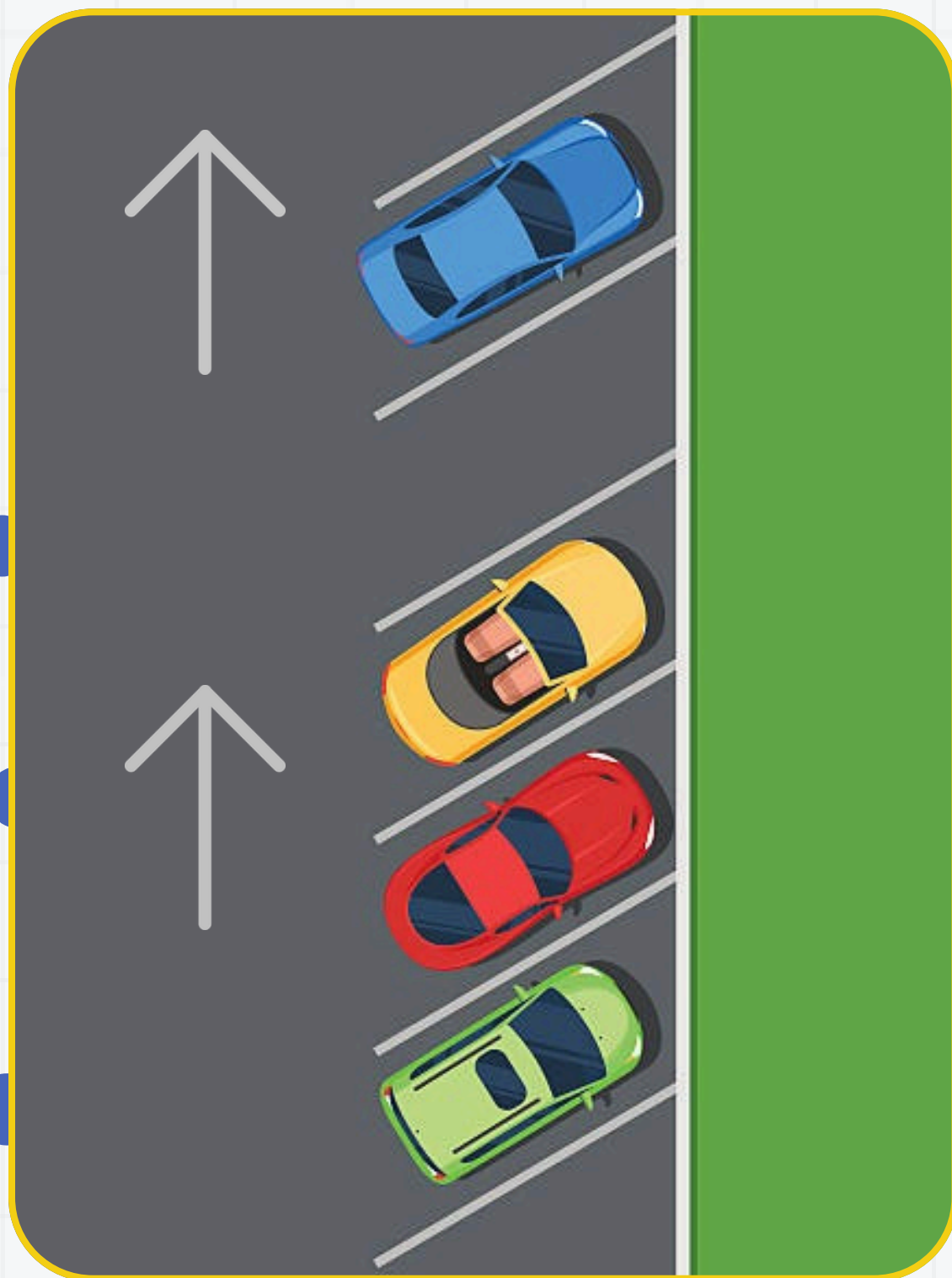
Généralisation



Soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ une séquence d'entiers.

Les fonctions de parking de type λ sont les séquences (a_1, a_2, \dots, a_n) telles que leurs réarrangements croissants $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ respectent:

$$b_i \leq \lambda_{n-i+1} \text{ pour tout } i.$$



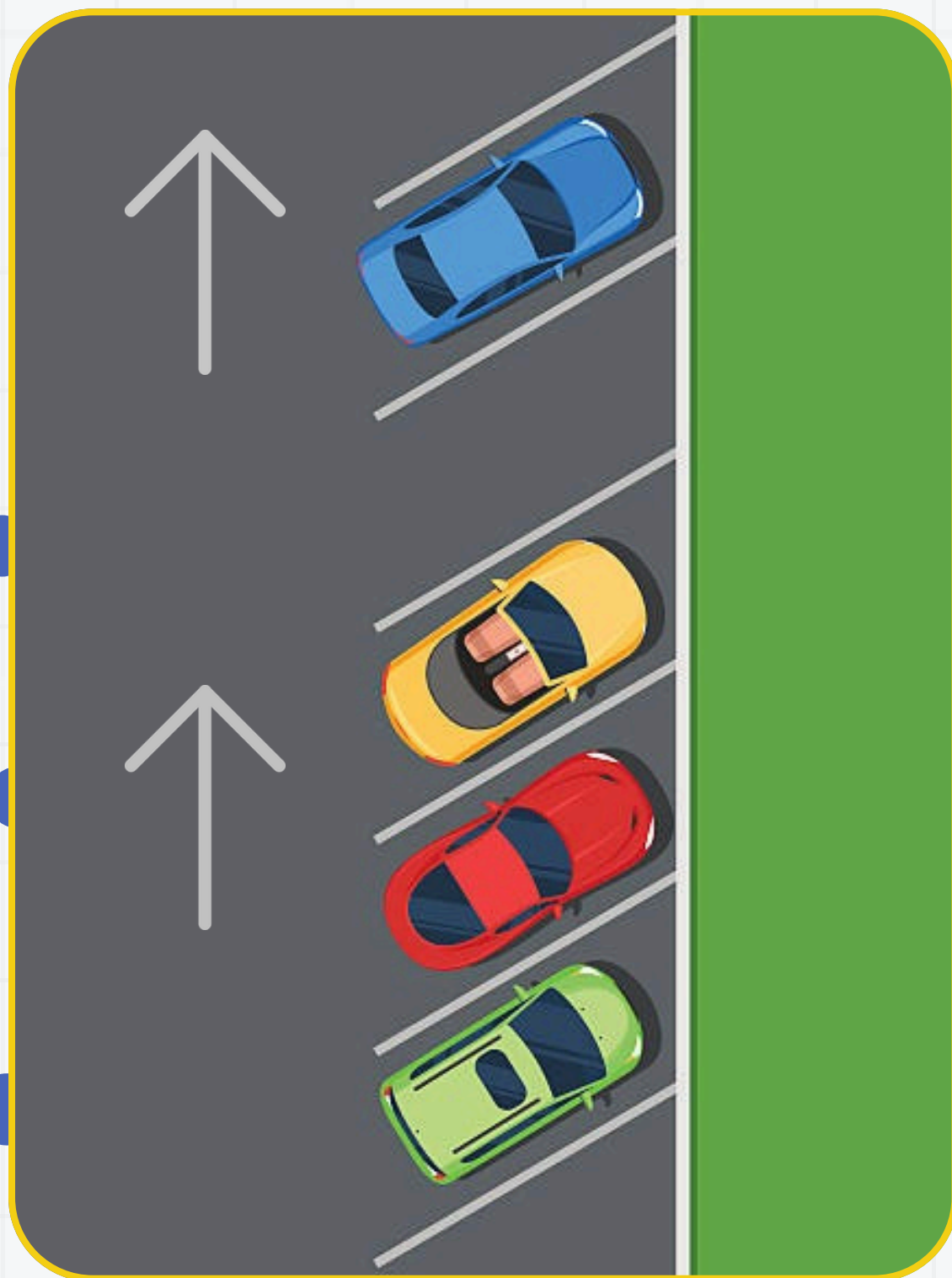
Généralisation

Soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ une séquence d'entiers.

Les fonctions de parking de type λ sont les séquences (a_1, a_2, \dots, a_n) telles que leurs réarrangements croissants $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ respectent:

$$b_i \leq \lambda_{n-i+1} \text{ pour tout } i.$$

Pour les fonctions de parking classiques:



Généralisation

Soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ une séquence d'entiers.

Les fonctions de parking de type λ sont les séquences (a_1, a_2, \dots, a_n) telles que leurs réarrangements croissants $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ respectent:

$$b_i \leq \lambda_{n-i+1} \text{ pour tout } i.$$

Pour les fonctions de parking classiques:

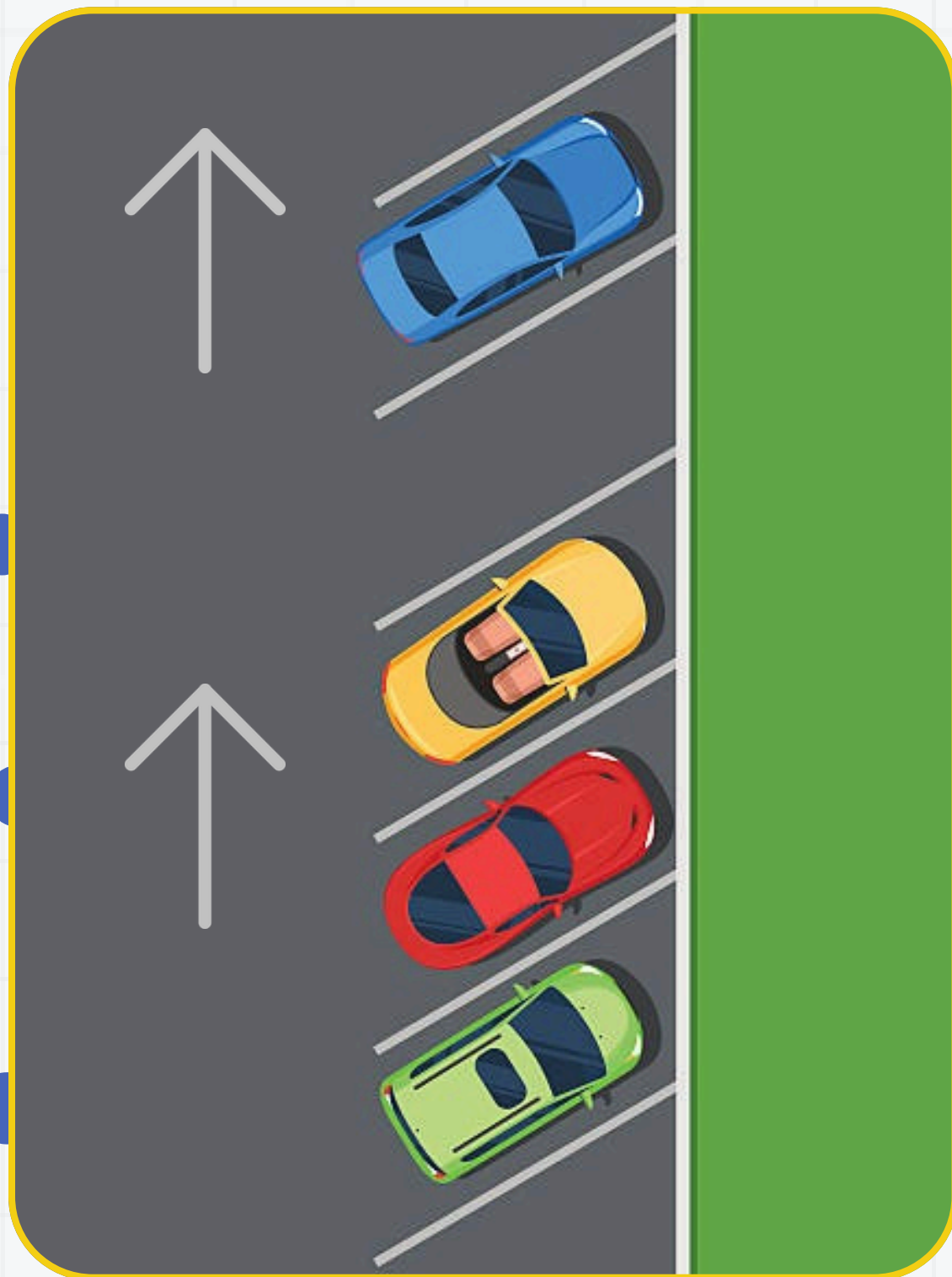
$$\lambda = (n, n - 1, \dots, 1)$$

Généralisation

Soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ une séquence d'entiers.
Les fonctions de parking de type λ sont les séquences
 (a_1, a_2, \dots, a_n) telles que leurs réarrangements croissants
 $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ respectent:

$$b_i \leq \lambda_{n-i+1} \text{ pour tout } i.$$

$$N(\lambda) = n! \left(\det \left[\frac{(\lambda_{n-i+1})^{j-i+1}}{(j-i+1)!} \right]_{i,j=1}^n \right)$$



Variante

(p, q)-fonctions de parking

On considère une rue avec $n = p + q$ places.

Il y a p voitures rouges et q voitures bleues.

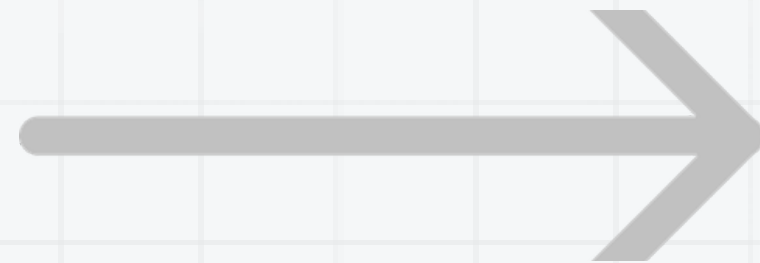
La voiture rouge i veut avoir au moins a_i voiture bleues garées avant elle.

La voiture bleue j veut avoir au moins b_j voitures rouges garées avant elle.

Le couple de séquence $(a_1, a_2, \dots, a_p), (b_1, b_2, \dots, b_q)$ est appelé (p, q)-fonction de parking s'il existe une configuration qui respecte les préférences.

Variante

La $(4,6)$ -séquence $(0124, 011344)$ est une $(4,6)$ -fonction de parking.



Variante

(p,q)-fonctions de parking

On considère une rue avec $n = p + q$ places.

Il y a p voitures rouges et q voitures bleues.

La voiture rouge i veut avoir au moins a_i voiture bleues garées avant elle.

La voiture bleue j veut avoir au moins b_j voitures rouges garées avant elle.

Le couple de séquence $(a_1, a_2, \dots, a_p), (b_1, b_2, \dots, b_q)$ est appelé (p, q) -fonction de parking s'il existe une configuration qui respecte les préférences.

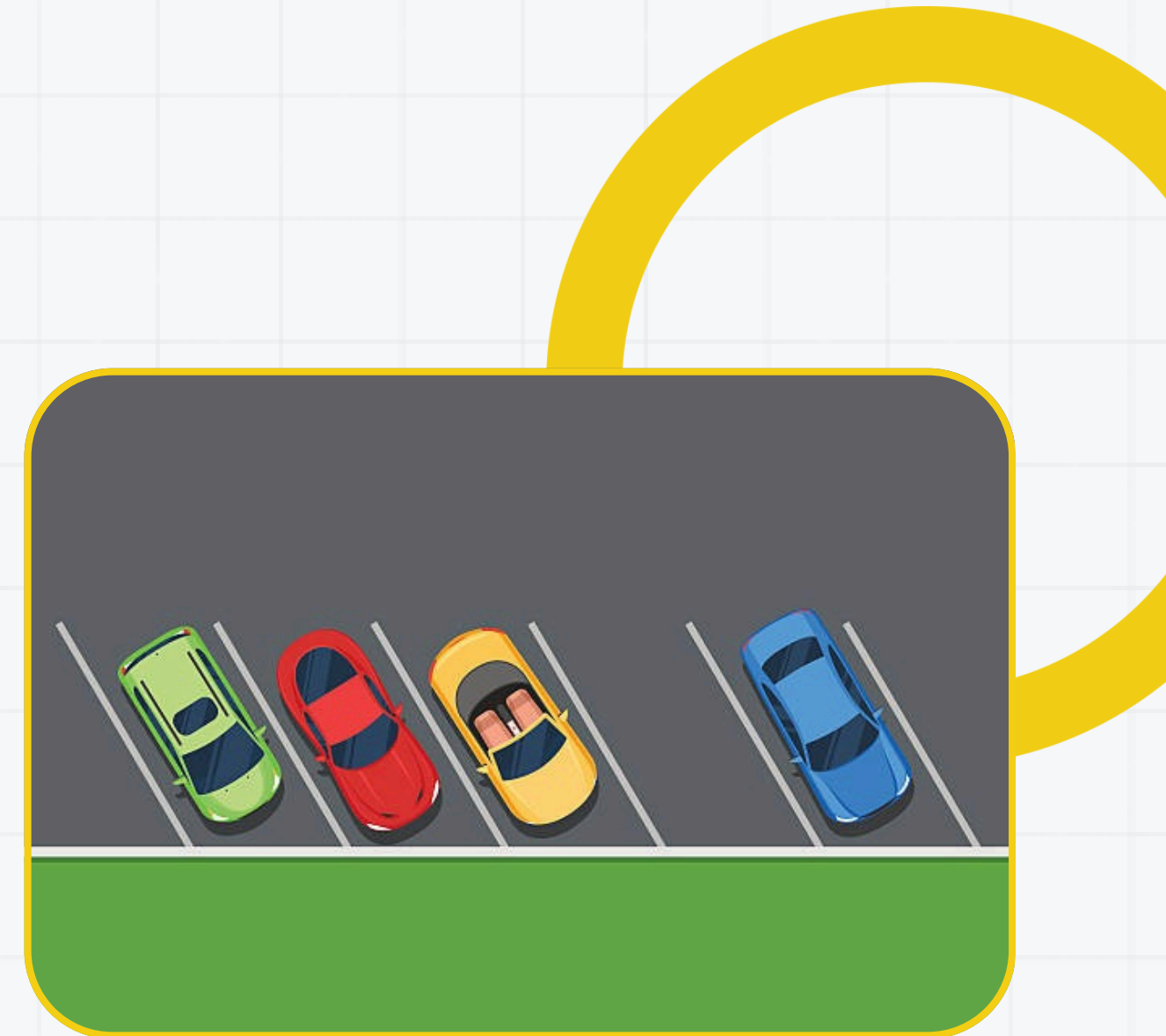
Le nombre de (p, q) -fonctions de parking est:

$$(p + q + 1)(p + 1)^{q-1}(q + 1)^{p-1}$$

Le nombre de (p, q) -fonctions de parking croissantes est égal au **nombre de Narayana** $N(p + q + 1, p + 1)$.

Toujours plus

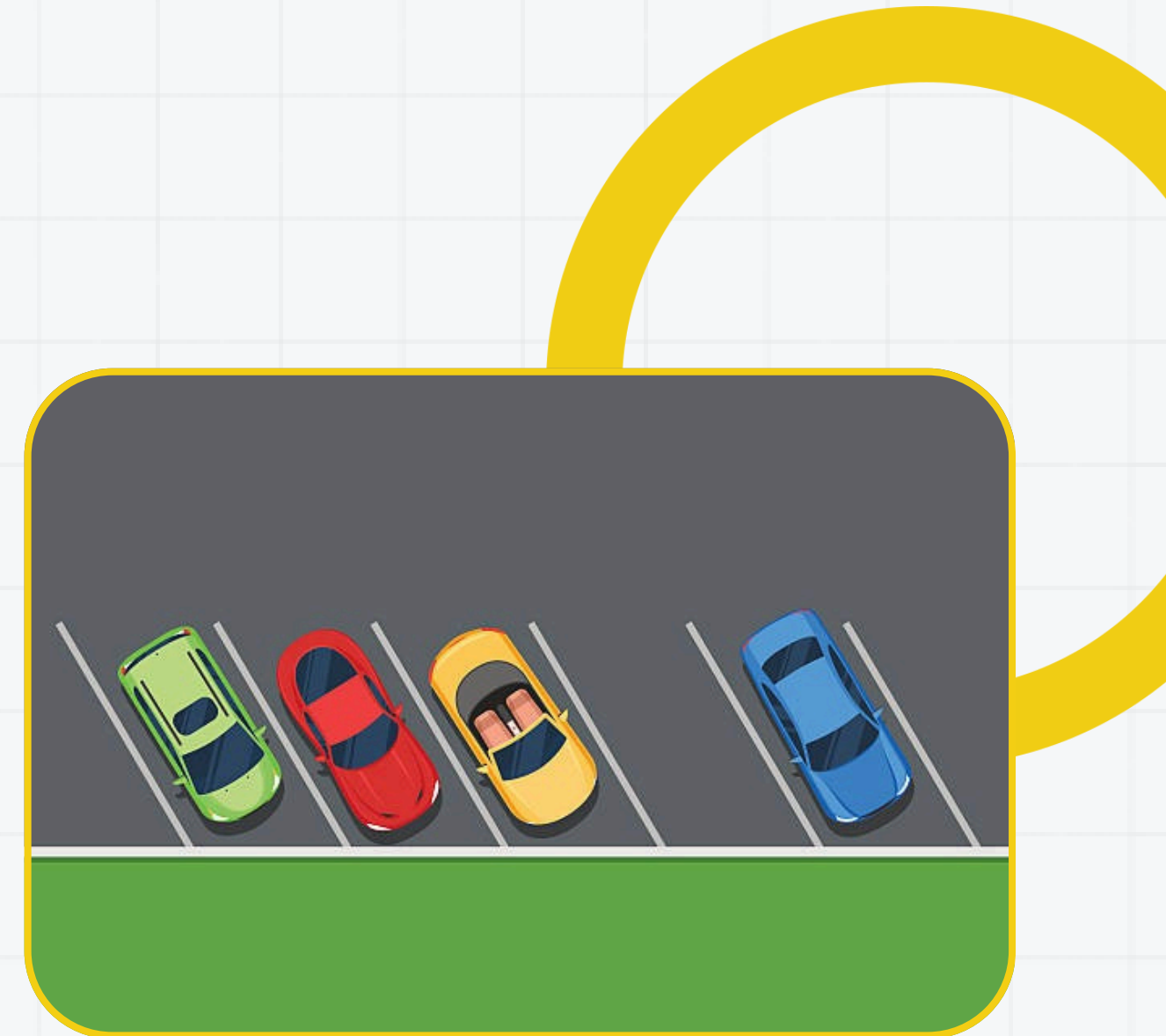
- G-fonctions de parking avec G un graphe.
- Lien avec de la géométrie algébrique (Shi arrangement).
- Questions probabilistes.
- Polynômes symétriques.
- Points fixes d'une fonction de parking ($a_i = i$) \rightarrow papier sorti en 2024.
- Et bien plus...



Toujours plus

- G-fonctions de parking avec G un graphe.
- Lien avec de la géométrie algébrique (Shi arrangement).
- Questions probabilistes.
- Polynômes symétriques.
- Points fixes d'une fonction de parking ($a_i = i$) \rightarrow papier sorti en 2024.
- Et bien plus...

Vous pouvez même créer vous-même vos propres questions!





*Merci pour votre
écoute.*



Analyse topologique des données

Étienne Mann

Laboratoire de Recherche en Mathématique d'Angers
Pi-day Louis le Grand

13 mars 2026

Topologie: la sphère



Topologie: les tores



Figure: Tore avec 1 trou, 2 trous, 3 trous...trou=genre

Définition (Vaseuse)

On dit que 2 formes sont identiques si on peut passer de l'une à l'autre en les déformant sans les déchirer.

Topologie

Définition (Vaseuse)

On dit que 2 formes sont identiques si on peut passer de l'une à l'autre en les déformant sans les déchirer.

Définition

On dit que 2 variétés topologiques sont les mêmes topologiquement si on peut passer d'une figure à l'autre avec une bijection continue et dont la réciproque est continue

$E = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ et $F = 2.x^2 + 3.y^2 + 4.z^2 - 5$. Pour passer de E à F , on considère pour $t \in [0, 1]$

$$t.E + (1 - t).F$$

Homologie simpliciale



	sommets	arêtes	faces	$S-A+F$
tétraèdre	4	6	4	$4-6+4=2$
cube	8	12	6	$8-12+6=2$
octaèdre	6	12	8	$6-12+8=2$

Homologie simpliciale



	sommets	arêtes	faces	S-A+F
tétraèdre	4	6	4	$4-6+4=2$
cube	8	12	6	$8-12+6=2$
octaèdre	6	12	8	$6-12+8=2$

Mais pourquoi ça fait 2 ?

Homologie simpliciale et nombre de Betti (1823-1892)

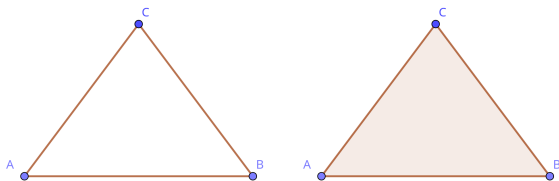
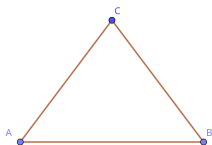


Figure: Triangle creux ou triangle plein

- dimension 0: On a 3 sommets $\rightsquigarrow \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}.A \times \mathbb{R}.B \times \mathbb{R}.C$
- dimension 1: On a 3 arêtes $\rightsquigarrow \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}.[AB] \times \mathbb{R}.[BC] \times \mathbb{R}.[CA]$
- dimension 2: On a 1 face ou 0 selon qu'on regarde le triangle creux ou plein.

Nombre de Betti du triangle creux



$$\begin{array}{ccc} \text{dim 1} & & \text{dim 0} \\ \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^3 \end{array}$$

$$[AB] = (1, 0, 0) \longrightarrow B - A = (-1, 1, 0)$$

$$[BC] = (0, 1, 0) \longrightarrow C - B = (0, -1, 1)$$

$$\begin{aligned} [CA] &= (0, 0, 1) \longrightarrow A - C = (1, 0, -1) \\ &= (C - B) - (B - A) \end{aligned}$$

- On définit $H^0(\mathring{T}) = \mathbb{R}^3 / f(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^1$ donc $b_0(\mathring{T}) = 1$
- On définit $H^1(\mathring{T}) = \{v \mid f(v) = 0\} = \mathbb{R} \cdot (1, 1, 1)$ donc $b_1(\mathring{T}) = 1$.

Homologie simpliciale et nombre de Betti

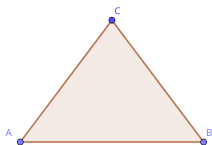


Figure: On considère le triangle T plein

$$\begin{array}{ccccc} \dim 2 & & \dim 1 & & \dim 0 \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^3 \\ (ABC) & \rightarrow & [BC] - [AC] + [AB] & = & (1, 1, 1) \end{array}$$

- On définit $H^0(T) = \mathbb{R}^3 / f(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}$ donc $b_0(T) = 1$
- On définit $H^1(T) = \{v \mid f(v) = 0\} / g(\mathbb{R}) = 0$ donc $b_1(T) = 0$
- On définit $H^2(T) = \{v \mid g(v) = 0\} = 0$ donc $b_2(T) = 0$

Nombre de Betti et Caractéristiques d'Euler-Poincaré

	\mathring{T}	Cercle	T	disque	point
b_0	1	1	1	1	1
b_1	1	1	0	0	0
b_2	0	0	0	0	0
$\chi = b_0 - b_1 + b_2$	0	0	1	1	1

Définition

La somme alternée des nombres de Betti est appelée la caractéristique d'Euler-Poincaré et on la note χ .

Théorème

Si deux forment sont topologiquement identiques alors elles ont les mêmes nombres de Betti.

- 1 Un triangle creux est topologiquement comme un cercle.
- 2 Un triangle plein est topologiquement comme un point.

Nombre de Betti du tétraèdre

Théorème

On peut faire le même calcul sur un tétraèdre et on trouve

$$b_0(\text{Tétraèdre}) = 1$$

$$b_1(\text{Tétraèdre}) = 0$$

$$b_2(\text{Tétraèdre}) = 1$$

La caractéristique d'Euler-Poincaré est

$$\chi(\text{Tétraèdre}) = b_0 - b_1 + b_2 = 2$$

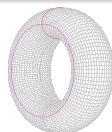
Comme le tétraèdre est topologiquement une sphère alors on comprend que le "2" qu'on obtenait est simplement **la caractéristique d'Euler de la sphère.**

Homologie simpliciale des tores

	Sphère	1-Tore	2-Tore	g-Tore
b_0	1	1	1	1
b_1	0	2	4	$2g$
b_2	1	1	1	1
$\chi = \sum (-1)^i b_i$	2	0	-2	$2-2g$

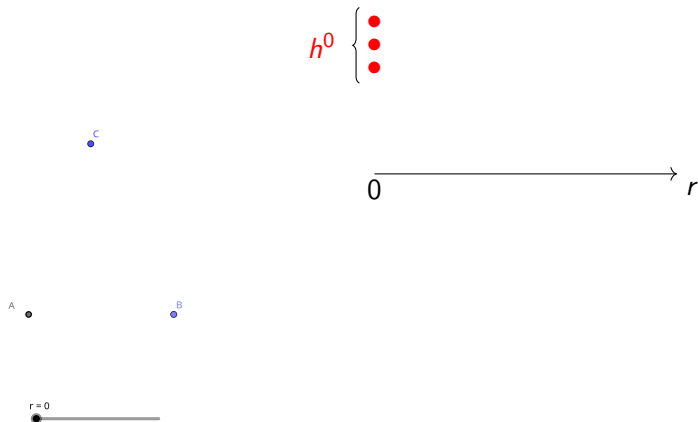
Théorème

- 1 On ne peut pas déformer une sphère en un tore.
- 2 Deux tores sont topologiquement identiques si et seulement si, ils ont le même genre c'à d le même nombre de trous.

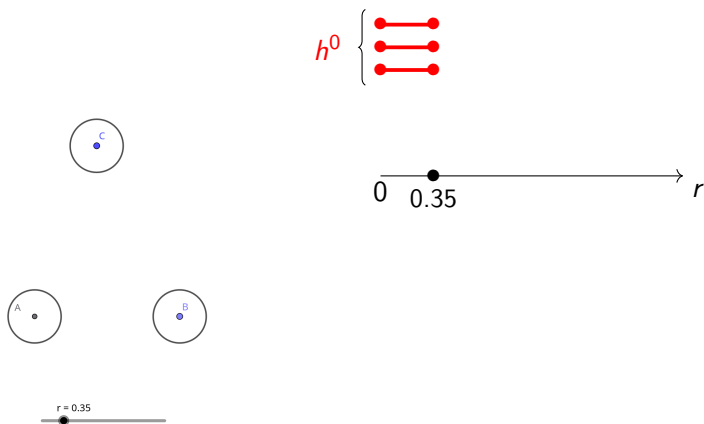


Comment utiliser la topologie pour analyser les données ?

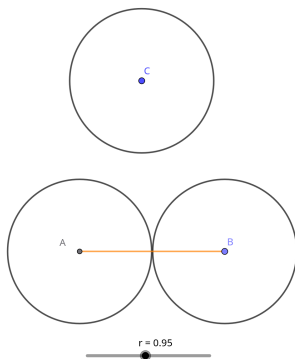
Homologie persistante



Homologie persistante



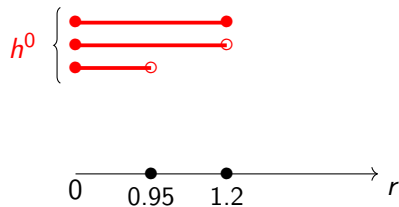
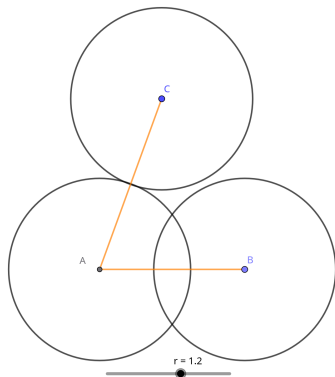
Homologie persistante



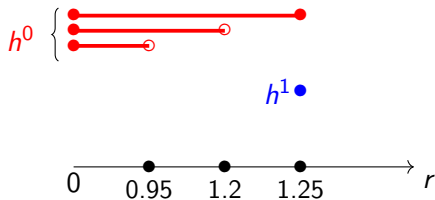
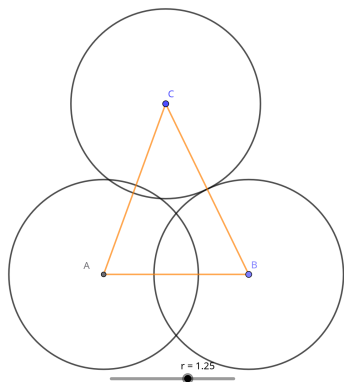
$$h^0 \left\{ \begin{array}{l} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right.$$



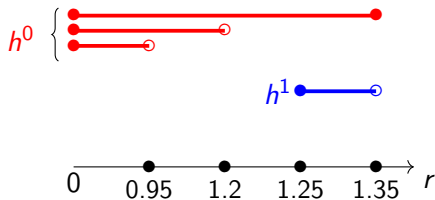
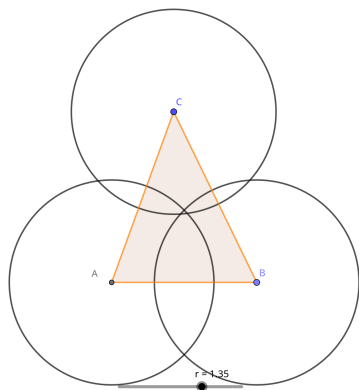
Homologie persistante



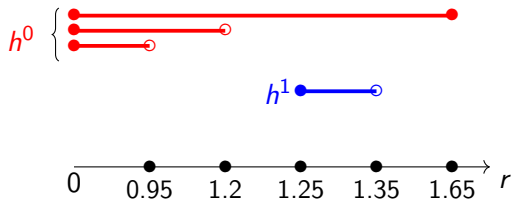
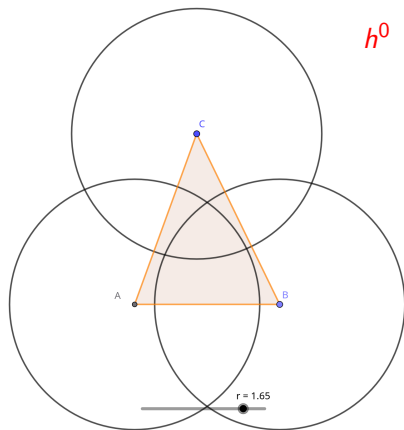
Homologie persistante



Homologie persistante



Homologie persistante



Homologie persistante

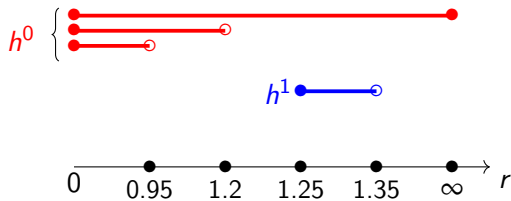
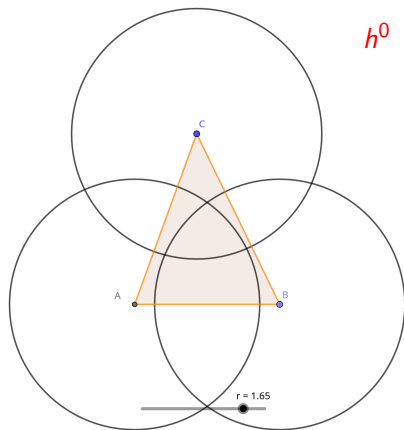
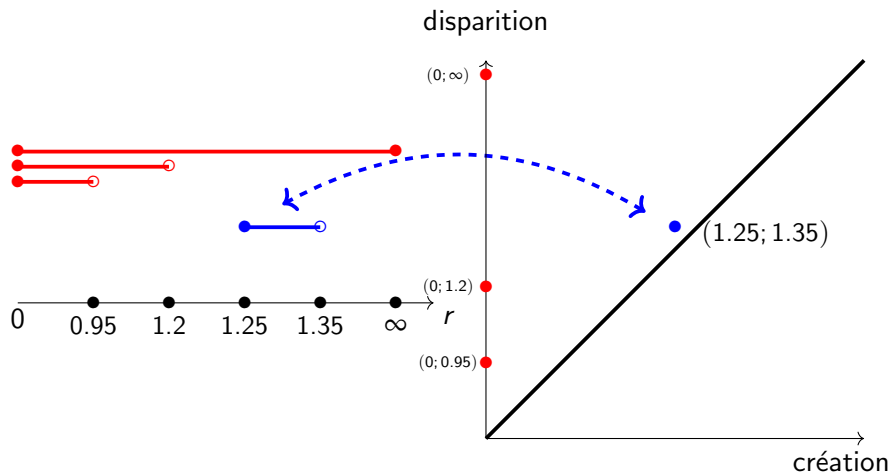
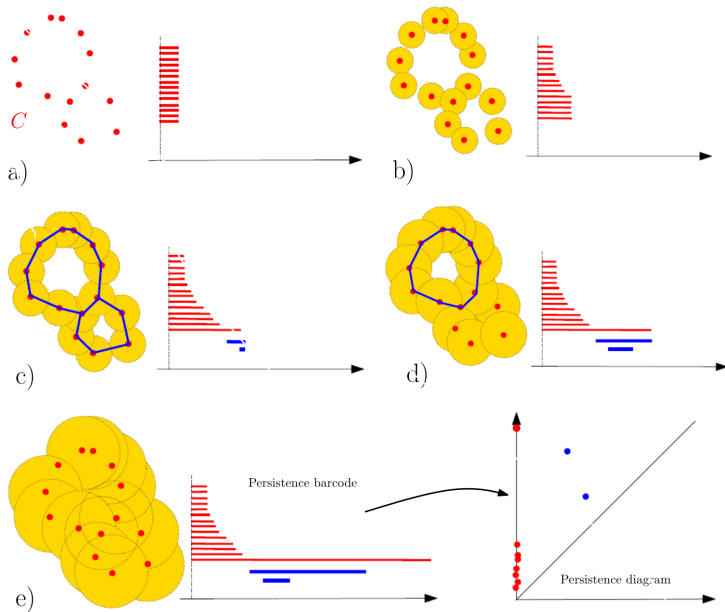


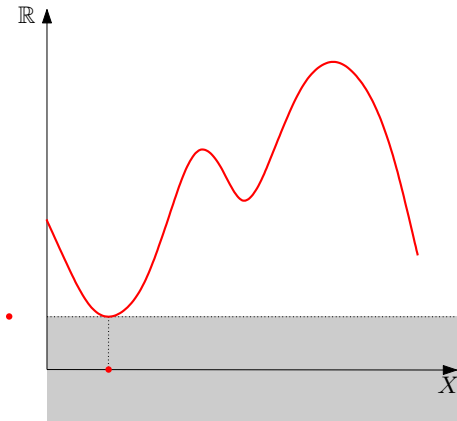
Diagramme de persistante





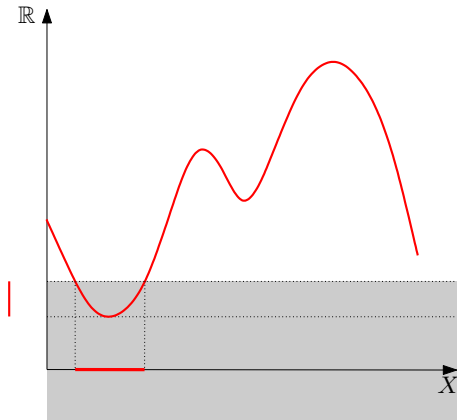
Persistent homology for functions

- Tracking and encoding the evolution of the connected components (0-dimensional homology) of the sublevel sets of a function
- The family of sublevel sets of a function is an example of [filtration](#).



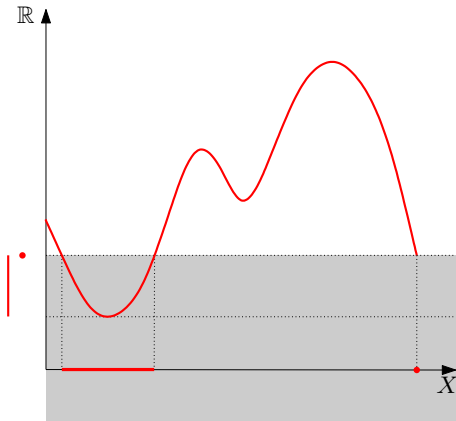
Persistent homology for functions

- Tracking and encoding the evolution of the connected components (0-dimensional homology) of the sublevel sets of a function
- The family of sublevel sets of a function is an example of [filtration](#).



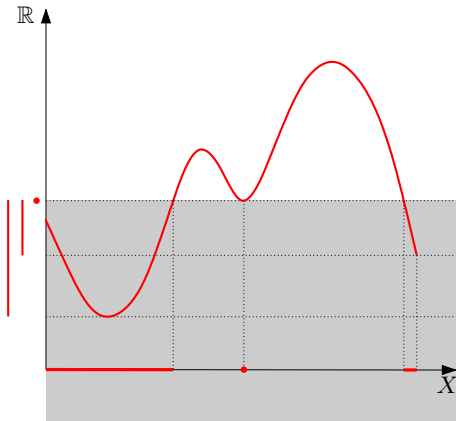
Persistent homology for functions

- Tracking and encoding the evolution of the connected components (0-dimensional homology) of the sublevel sets of a function
- The family of sublevel sets of a function is an example of [filtration](#).



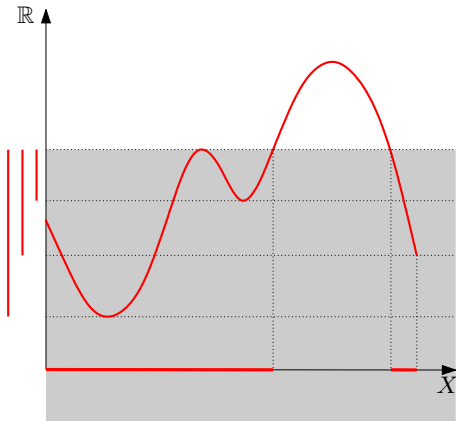
Persistent homology for functions

- Tracking and encoding the evolution of the connected components (0-dimensional homology) of the sublevel sets of a function
- The family of sublevel sets of a function is an example of [filtration](#).



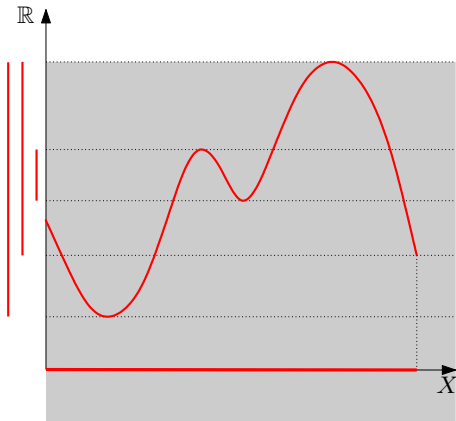
Persistent homology for functions

- Tracking and encoding the evolution of the connected components (0-dimensional homology) of the sublevel sets of a function
- The family of sublevel sets of a function is an example of [filtration](#).



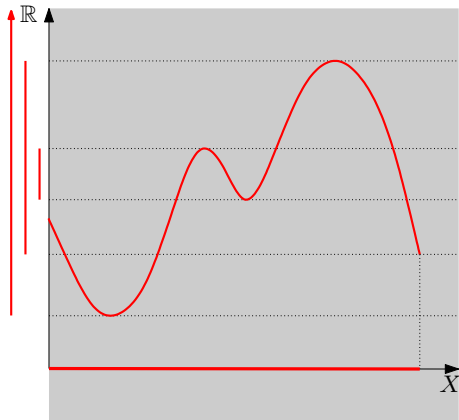
Persistent homology for functions

- Tracking and encoding the evolution of the connected components (0-dimensional homology) of the sublevel sets of a function
- The family of sublevel sets of a function is an example of **filtration**.



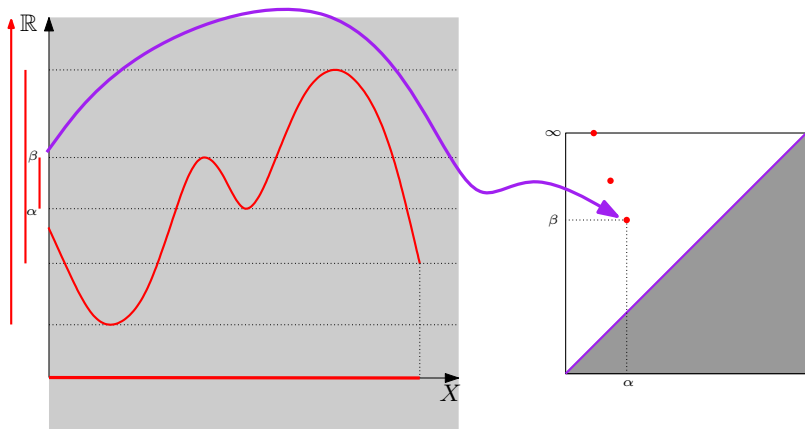
Persistent homology for functions

- The family of sublevel sets of a function is an example of **filtration**.

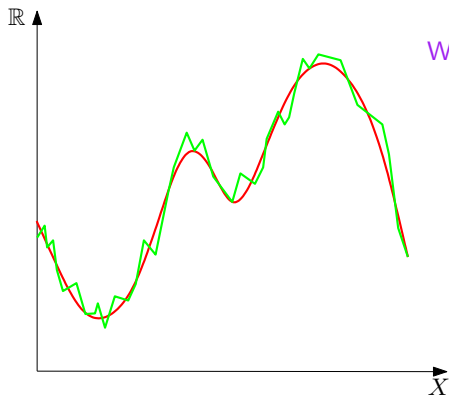


Persistent homology for functions

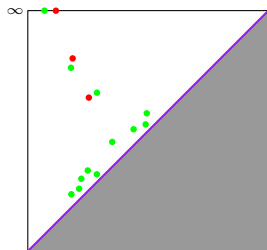
- Tracking and encoding the evolution of the connected components (0-dimensional homology) of the sublevel sets of a function
- The family of sublevel sets of a function is an example of **filtration**.



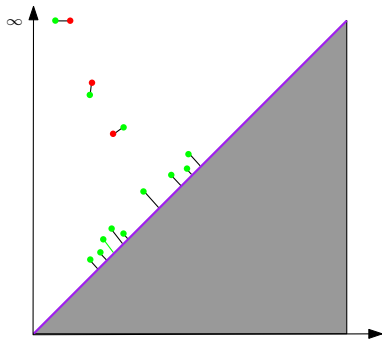
Stability properties



What if f is slightly perturbed?



Distance between persistence diagrams



The **bottleneck distance** between two diagrams D_1 and D_2 is

$$d_B(D_1, D_2) = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{p \in D_1} \|p - \gamma(p)\|_\infty$$

where Γ is the set of all the bijections between D_1 and D_2 and $\|p - q\|_\infty = \max(|x_p - x_q|, |y_p - y_q|)$.

Important Remark: There is one persistence diagram per homology dimension. In general, are compared diagrams corresponding to same homology dim.

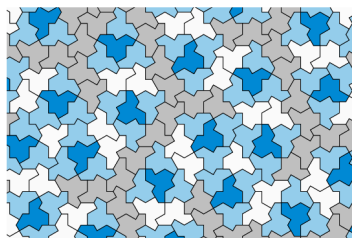
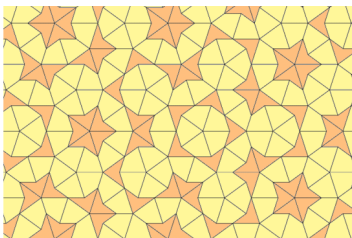
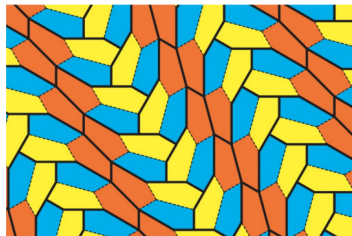
Pavages d'espaces exotiques

Nicolas Tholozan

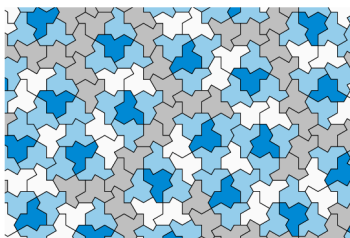
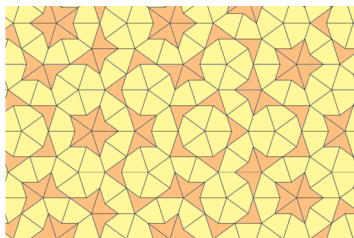
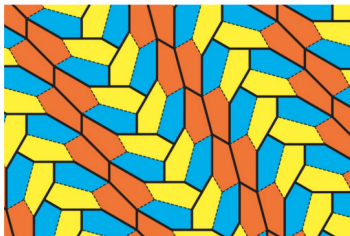
CNRS / ÉNS Paris

Π -day, 2026

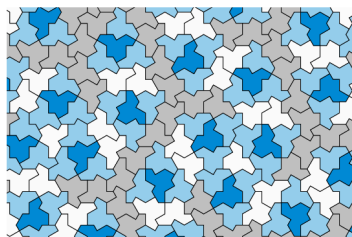
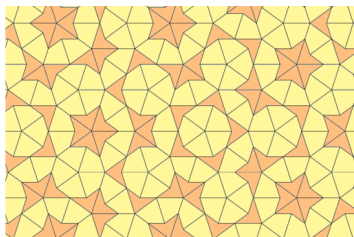
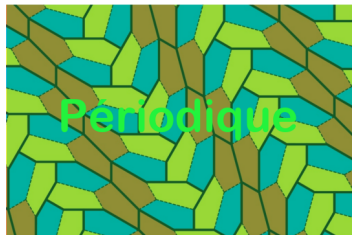
Pavages du plan euclidien



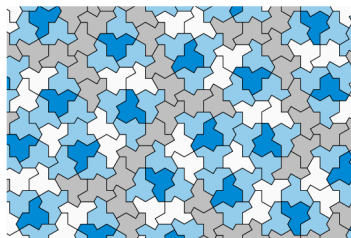
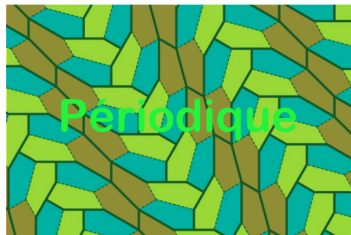
Pavages du plan euclidien



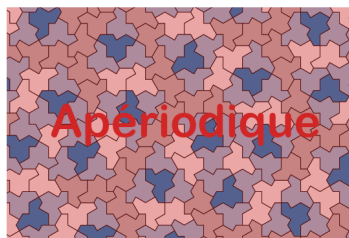
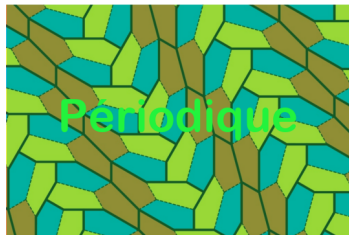
Pavages du plan euclidien



Pavages du plan euclidien



Pavages du plan euclidien



Un pavage du plan euclidien \mathbb{E}^2 est la donnée de :

Un pavage du plan euclidien \mathbb{E}^2 est la donnée de :

- $F \subset \mathbb{E}^2$ fermé, borné (la "tuile fondamentale")

Un pavage du plan euclidien \mathbb{E}^2 est la donnée de :

- $F \subset \mathbb{E}^2$ fermé, borné (*la "tuile fondamentale"*)
- $\Gamma \subset \text{Isom}(\mathbb{E}^2)$ (*les identifications des autres tuiles avec la tuile fondamentale*)

Un pavage du plan euclidien \mathbb{E}^2 est la donnée de :

- $F \subset \mathbb{E}^2$ fermé, borné (la "tuile fondamentale")
- $\Gamma \subset \text{Isom}(\mathbb{E}^2)$ (les identifications des autres tuiles avec la tuile fondamentale)

tels que :

- $\{\eta \in \Gamma \mid \gamma(F) \cap \eta(F) \neq \emptyset\}$ est fini pour tout γ (une tuile "touche" un nombre fini d'autres tuiles)

Un pavage du plan euclidien \mathbb{E}^2 est la donnée de :

- $F \subset \mathbb{E}^2$ fermé, borné (la "tuile fondamentale")
- $\Gamma \subset \text{Isom}(\mathbb{E}^2)$ (les identifications des autres tuiles avec la tuile fondamentale)

tels que :

- $\{\eta \in \Gamma \mid \gamma(F) \cap \eta(F) \neq \emptyset\}$ est fini pour tout γ (une tuile "touche" un nombre fini d'autres tuiles)
- $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(F) = \mathbb{E}^2$ (les tuiles recouvrent le plan euclidien)

Un pavage du plan euclidien \mathbb{E}^2 est la donnée de :

- $F \subset \mathbb{E}^2$ fermé, borné (la “*tuile fondamentale*”)
- $\Gamma \subset \text{Isom}(\mathbb{E}^2)$ (les identifications des autres tuiles avec la tuile fondamentale)

tels que :

- $\{\eta \in \Gamma \mid \gamma(F) \cap \eta(F) \neq \emptyset\}$ est fini pour tout γ (une tuile “*touche*” un nombre fini d’autres tuiles)
- $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(F) = \mathbb{E}^2$ (les tuiles recouvrent le plan euclidien)

Le pavage est **périodique** si Γ est un **groupe**, i.e. pour tout $\gamma, \eta \in \Gamma$, $\gamma \circ \eta \in \Gamma$ et $\gamma^{-1} \in \Gamma$ (la transformation qui envoie une tuile sur une autre envoie toute tuile sur une autre tuile)

Un pavage du plan euclidien \mathbb{E}^2 est la donnée de :

- $F \subset \mathbb{E}^2$ fermé, borné (la "tuile fondamentale")
- $\Gamma \subset \text{Isom}(\mathbb{E}^2)$ (les identifications des autres tuiles avec la tuile fondamentale)

tels que :

- $\{\eta \in \Gamma \mid \gamma(F) \cap \eta(F) \neq \emptyset\}$ est fini pour tout γ (une tuile "touche" un nombre fini d'autres tuiles)
- $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(F) = \mathbb{E}^2$ (les tuiles recouvrent le plan euclidien)



Théorème (Fedorov, 1891)



Théorème (Fedorov, 1891)

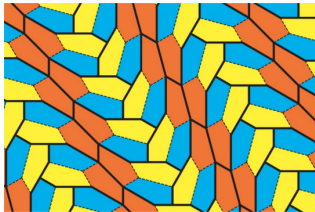
*Il existe 17 groupes de pavages du plan
Euclidien*



Théorème (Fedorov, 1891)

*Il existe 17 groupes de pavages du plan
Euclidien*

Mais ils sont “presque” les mêmes : ils
contiennent tous deux translations linéairement
indépendantes



Et en dimension supérieure ?

Un pavage du plan euclidien \mathbb{E}^2 est la donnée de :

- $F \subset \mathbb{E}^2$ fermé, borné (*la “tuile fondamentale”*)
- $\Gamma \subset \text{Isom}(\mathbb{E}^2)$ (*les identifications des autres tuiles avec la tuile fondamentale*)

tels que :

- $\{\eta \in \Gamma \mid \gamma(F) \cap \eta(F) \neq \emptyset\}$ est fini pour tout η (*une tuile “touche” un nombre fini d’autres tuiles*)
- $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(F) = \mathbb{E}^2$ (*les tuiles recouvrent le plan euclidien*)

Le pavage est **périodique** si Γ est un groupe, appelé **groupe de pavage**

Et en dimension supérieure ?

Un pavage de l'espace euclidien \mathbb{E}^n est la donnée de :

- $F \subset \mathbb{E}^n$ fermé, borné (la "tuile fondamentale")
- $\Gamma \subset \text{Isom}(\mathbb{E}^n)$ (les identifications des autres tuiles avec la tuile fondamentale)

tels que :

- $\{\eta \in \Gamma \mid \gamma(F) \cap \eta(F) \neq \emptyset\}$ est fini pour tout η (une tuile "touche" un nombre fini d'autres tuiles)
- $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(F) = \mathbb{E}^n$ (les tuiles recouvrent l'espace euclidien)

Le pavage est **périodique** si Γ est un groupe, appelé **groupe de pavage**

Et en dimension supérieure ?

Théorème (Bieberbach, 1911)

Théorème (Bieberbach, 1911)

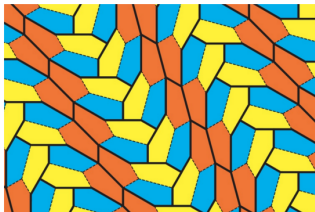
Soit $\Gamma \subset \text{Isom}(E^n)$ un groupe de pavage. Alors il existe $\mathbb{Z}^n \simeq \Gamma' \subset \Gamma$ engendré par n translations linéairement indépendantes. De plus, Γ/Γ' est fini.

Et en dimension supérieure ?

Théorème (Bieberbach, 1911)

Soit $\Gamma \subset \text{Isom}(E^n)$ un groupe de pavage. Alors il existe $\mathbb{Z}^n \simeq \Gamma' \subset \Gamma$ engendré par n translations linéairement indépendantes. De plus, Γ/Γ' est fini.

Boring...



Poincaré, *La Science et l'hypothèse*

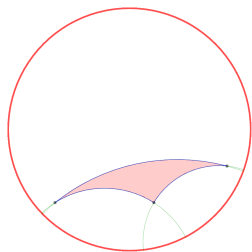




Poincaré, *La Science et l'hypothèse*
« Supposons [...] un monde renfermé dans une grande sphère [...] : La température n'y est pas uniforme ; elle est maxima au centre, et elle diminue à mesure qu'on s'en éloigne [...] Dans ce monde, tous les corps [ont] même coefficient de dilatation [...] Si ce monde est limité au point de vue de notre géométrie habituelle, il paraîtra infini à ses habitants. Quand ceux-ci, en effet, veulent se rapprocher de la sphère limite, ils se refroidissent et deviennent de plus en plus petits. »

Le plan hyperbolique

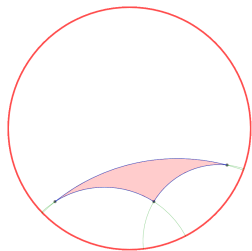
$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$



Le plan hyperbolique

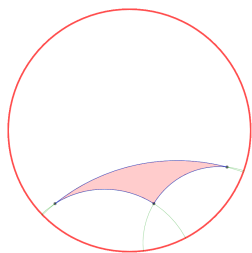
$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

$$\text{Longueur}(c) = \int_0^1 \frac{2|c'(t)|}{1-|c(t)|^2}$$



Le plan hyperbolique

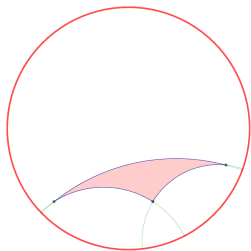
$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$



Longueur(c) = $\int_0^1 \frac{2|c'(t)|}{1-|c(t)|^2}$ **Distance :**
 $d(x, y) = \inf\{\text{Longueur}(c), c(0) = x, c(1) = y\}$

Le plan hyperbolique

$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

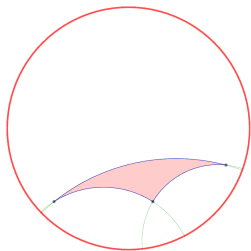


Longueur(c) = $\int_0^1 \frac{2|c'(t)|}{1-|c(t)|^2}$ **Distance :**
 $d(x, y) = \inf\{\text{Longueur}(c), c(0) = x, c(1) = y\}$

Isométrie : $g : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ tel que
 $d(g(x), g(y)) = d(x, y)$

Le plan hyperbolique

$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

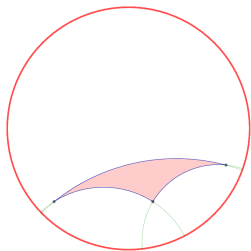


Longueur(c) = $\int_0^1 \frac{2|c'(t)|}{1-|c(t)|^2}$ **Distance :**
 $d(x, y) = \inf\{\text{Longueur}(c), c(0) = x, c(1) = y\}$

Isométrie : $g : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ tel que
 $d(g(x), g(y)) = d(x, y)$

Segments, droites, angles, triangles, aires...

$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$



Longueur(c) = $\int_0^1 \frac{2|c'(t)|}{1-|c(t)|^2}$ **Distance :**
 $d(x, y) = \inf\{\text{Longueur}(c), c(0) = x, c(1) = y\}$

Isométrie : $g : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ tel que
 $d(g(x), g(y)) = d(x, y)$

Segments, droites, angles, triangles, aires...

Proposition

$$\text{Aire}(\text{triangle}) = \pi - \sum \text{angles} .$$

Pavages hyperboliques : définition

Un pavage de l'espace euclidien \mathbb{E}^n est la donnée de :

- $F \subset \mathbb{E}^n$ fermé, borné (la "tuile fondamentale")
- $\Gamma \subset \text{Isom}(\mathbb{E}^n)$ (les identifications des autres tuiles avec la tuile fondamentale)

tels que :

- $\{\eta \in \Gamma \mid \gamma(F) \cap \eta(F) \neq \emptyset\}$ est fini pour tout η (une tuile "touche" un nombre fini d'autres tuiles)
- $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(F) = \mathbb{E}^n$ (les tuiles recouvrent l'espace euclidien)

Le pavage est **périodique** si Γ est un groupe, appelé **groupe de pavage**

Pavages hyperboliques : définition

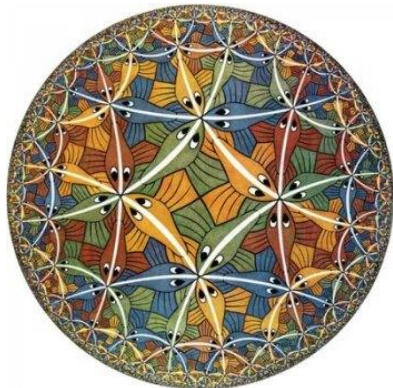
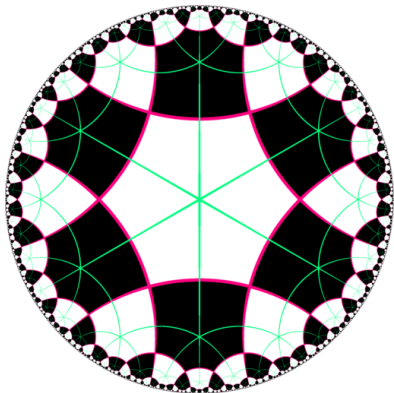
Un pavage du plan hyperbolique \mathbb{H}^2 est la donnée de :

- $F \subset \mathbb{H}^2$ fermé, borné (la “*tuile fondamentale*”)
- $\Gamma \subset \text{Isom}(\mathbb{H}^2)$ (les identifications des autres tuiles avec la tuile fondamentale)

tels que :

- $\{\eta \in \Gamma \mid \gamma(F) \cap \eta(F) \neq \emptyset\}$ est fini pour tout η (une tuile “*touche*” un nombre fini d’autres tuiles)
- $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(F) = \mathbb{H}^2$ (les tuiles recouvrent le plan hyperbolique)

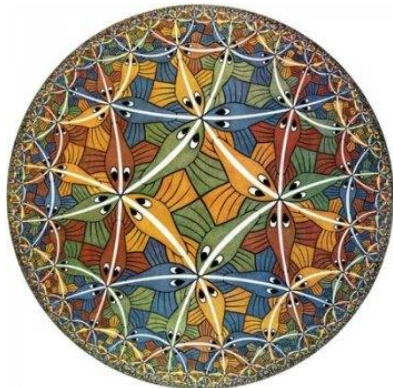
Le pavage est **périodique** si Γ est un groupe, appelé **groupe de pavage**



M.C. Escher, *Circle limit III*, 1969

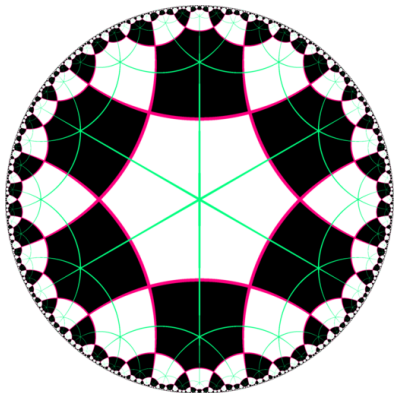
Coxeter, *the Trigonometry of Escher's woodcut "Circle limit III"*

Les courbes blanches **ne sont pas** des droites !



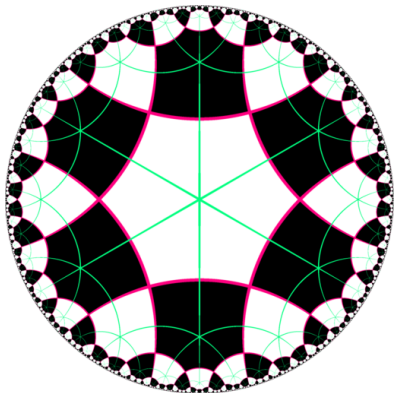
M.C. Escher, *Circle limit III*, 1969

Comment fabriquer ces pavages ?



Poincaré

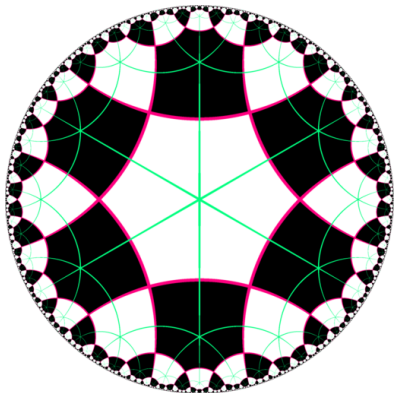
Comment fabriquer ces pavages ?



Poincaré

Prenez un polygone
(hyperbolique) avec des angles
 π/p , p entier.

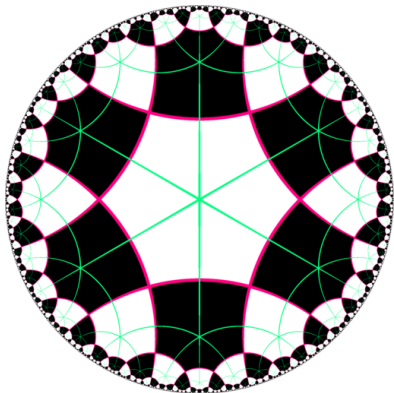
Comment fabriquer ces pavages ?



Poincaré

Prenez un polygone (hyperbolique) avec des angles π/p , p entier. Réféchissez-le sur ses côtés.

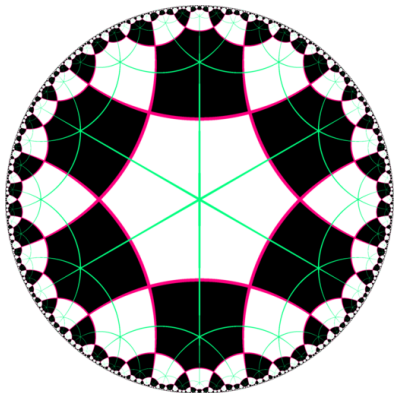
Comment fabriquer ces pavages ?



Poincaré

Prenez un polygone (hyperbolique) avec des angles π/p , p entier. Réfécissez-le sur ses côtés. Répétez.

Comment fabriquer ces pavages ?



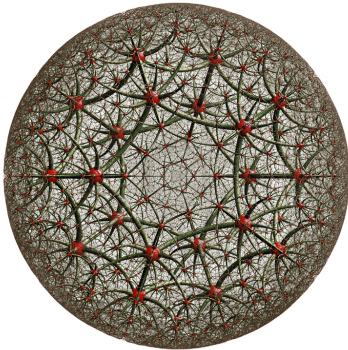
Poincaré

Prenez un polygone (hyperbolique) avec des angles π/p , p entier. Réfécissez-le sur ses côtés. Répétez.

Corollaire : Beaucoup de pavages hyperboliques, flexibilité, les groupes de pavage sont plus compliqués d'un point de vue algébrique.

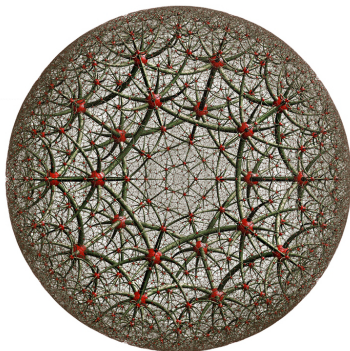
Et en dimension supérieure ?

La construction de Poincaré se généralise en “petite” dimension



Et en dimension supérieure ?

La construction de Poincaré se généralise en “petite” dimension

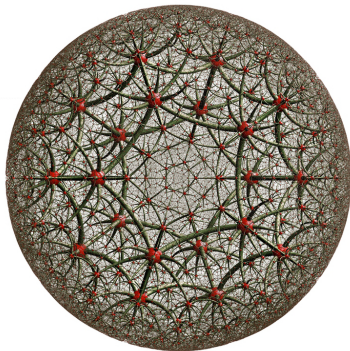


Théorème (Vinberg)

En dimension supérieure à 30, il n'y a plus de polytopes hyperboliques avec des angles dièdres divisant π .

Et en dimension supérieure ?

La construction de Poincaré se généralise en “petite” dimension



Théorème (Vinberg)

En dimension supérieure à 30, il n'y a plus de polytopes hyperboliques avec des angles dièdres divisant π .

Mais il existe d'autres constructions de pavages en toute dimension.

Le programme d'Erlangen (1872)

Le programme d'Erlangen (1872)



Felix Klein
(1849–1925)





Felix Klein
(1849–1925)

*« Als Verallgemeinerung der Geometrie entsteht so das folgende umfassende Problem : Es ist eine **Mannigfaltigkeit** und in derselben eine Transformationsgruppe gegeben ; man soll die der Mannigfaltigkeit angehörigen Gebilde hinsichtlich solcher Eigenschaften untersuchen, die durch die Transformationen der Gruppe nicht geändert werden. »*



Felix Klein
(1849–1925)

« Comme généralisation de la Géométrie se pose ainsi la question générale que voici : Étant données une **variété** et un groupe de transformations de cette **variété**, en étudier les êtres au point de vue des propriétés qui ne sont pas altérées par les transformations du groupe. »



Felix Klein
(1849–1925)

« Comme généralisation de la Géométrie se pose ainsi la question générale que voici : Étant données une **variété** et un groupe de transformations de cette **variété**, en étudier les êtres au point de vue des propriétés qui ne sont pas altérées par les transformations du groupe. »

Ce qu'on en a retenu : la géométrie est l'étude des propriétés d'un espace X muni d'un groupe (continu, transitif) de transformations G .

Un pavage du plan hyperbolique \mathbb{H}^2 est la donnée de :

- $F \subset \mathbb{H}^2$ fermé, borné (la “*tuile fondamentale*”)
- $\Gamma \subset \text{Isom}(\mathbb{H}^2)$ (les *identifications des autres tuiles avec la tuile fondamentale*)

tels que :

- $\{\eta \in \Gamma \mid \gamma(F) \cap \eta(F) \neq \emptyset\}$ est fini pour tout η (une tuile “*touche*” un nombre fini d’autres tuiles)
- $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(F) = \mathbb{H}^2$ (les tuiles recouvrent le plan hyperbolique)

Le pavage est **périodique** si Γ est un groupe, appelé **groupe de pavage**

Pavages : définition générale

Un pavage de l'espace X est la donnée de :

- $F \subset X$ fermé, borné (la "tuile fondamentale")
- $\Gamma \subset G$ (les identifications des autres tuiles avec la tuile fondamentale)

tels que :

- $\{\eta \in \Gamma \mid \gamma(F) \cap \eta(F) \neq \emptyset\}$ est fini pour tout η (une tuile "touche" un nombre fini d'autres tuiles)
- $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(F) = X$ (les tuiles recouvrent l'espace X)

Le pavage est **périodique** si Γ est un groupe, appelé **groupe de pavage**

$$Q(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2 + x_{n+1}^2$$

$$Q(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2 + x_{n+1}^2$$

$$O(Q) = \{g \in \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{R}) \mid Q \circ g = Q\}$$

$$Q(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2 + x_{n+1}^2$$

$$O(Q) = \{g \in GL(n+1, \mathbb{R}) \mid Q \circ g = Q\}$$

est un “groupe continu de transformations” qui agit transitivement sur

$$\{x \mid Q(x) = 1\} =$$

$$Q(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2 + x_{n+1}^2$$

$$O(Q) = \{g \in GL(n+1, \mathbb{R}) \mid Q \circ g = Q\}$$

est un “groupe continu de transformations” qui agit transitivement sur

$$\{x \mid Q(x) = 1\} = \mathbb{S}^n$$



$$Q(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2$$

$$O(Q) = \{g \in GL(n+1, \mathbb{R}) \mid Q \circ g = Q\}$$

est un “groupe continu de transformations” qui agit transitivement sur

$$\{x \mid Q(x) = -1\} =$$

$$Q(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2$$

$$O(Q) = \{g \in GL(n+1, \mathbb{R}) \mid Q \circ g = Q\}$$

est un “groupe continu de transformations” qui agit transitivement sur

$$\{x \mid Q(x) = -1\} = \mathbb{H}^n$$



$$Q(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q+1}^2$$

$$O(Q) = \{g \in \text{GL}(n+1, \mathbb{R}) \mid Q \circ g = Q\}$$

est un “groupe continu de transformations” qui agit transitivement sur

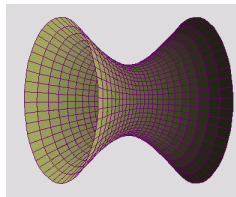
$$\{x \mid Q(x) = -1\} =$$

$$Q(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q+1}^2$$

$$O(Q) = \{g \in GL(n+1, \mathbb{R}) \mid Q \circ g = Q\}$$

est un “groupe continu de transformations” qui agit transitivement sur

$$\{x \mid Q(x) = -1\} = \mathbb{H}^{p,q}$$



Peut-on paver les espaces pseudo-hyperboliques ?

Peut-on paver les espaces pseudo-hyperboliques ?

le cas $\mathbb{H}^{2,1}$ (Kassel 2010, T. 2017)

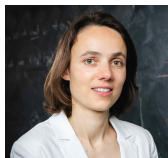


Fanny Kassel

Peut-on paver les espaces pseudo-hyperboliques ?

le cas $\mathbb{H}^{2,1}$ (Kassel 2010, T. 2017)

On comprend bien les groupes de pavages de $\mathbb{H}^{2,1}$. Ils sont liés aux pavages du plan hyperbolique.



Fanny Kassel

Peut-on paver les espaces pseudo-hyperboliques ?

le cas $\mathbb{H}^{2,1}$ (Kassel 2010, T. 2017)

On comprend bien les groupes de pavages de $\mathbb{H}^{2,1}$. Ils sont liés aux pavages du plan hyperbolique.



Fanny Kassel

Théorème (Kassel–Morita–T.
2025)

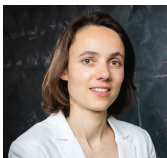


Yosuke
Morita

Peut-on paver les espaces pseudo-hyperboliques ?

le cas $\mathbb{H}^{2,1}$ (Kassel 2010, T. 2017)

On comprend bien les groupes de pavages de $\mathbb{H}^{2,1}$. Ils sont liés aux pavages du plan hyperbolique.



Fanny Kassel

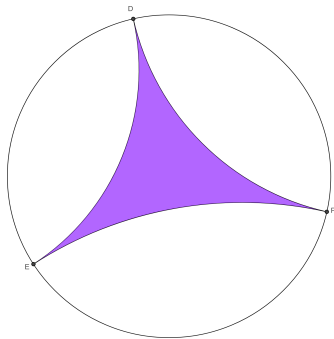
Théorème (Kassel–Morita–T.
2025)

*Si p n'est pas multiple de $2^{\frac{q-1}{2}}$,
alors $\mathbb{H}^{p,q}$ n'a pas de pavage
périodique*



Yosuke
Morita

Happy



day!



Baking integers
out of π

Maria Yakerson
IMJ-PRG, CNRS

π Day

Here's a miracle!

transcendental

Some numbers are „almost integers“:

$$e^{\pi} - \pi = 19,99909997\dots$$

$$e + \pi + e^{\pi} + e^{\pi} + \pi^e = 59,99945\dots$$

Here's a miracle!

transcendental

Some numbers are „almost integers“:

$$e^\pi - \pi = 19,99909997\dots$$

$$e + \pi + e^\pi + e^{\pi^2} + \pi^e = 59,99945\dots$$

$$\begin{aligned}
 e^{\pi\sqrt{43}} &= 12^3 (9^2 - 1)^3 + 744 - 2,225\dots \cdot 10^{-4} \\
 e^{\pi\sqrt{67}} &= 12^3 (21^2 - 1)^3 + 744 - 1,337\dots \cdot 10^{-6} \\
 e^{\pi\sqrt{163}} &= 12^3 (231^2 - 1)^3 + 744 - 7,499\dots \cdot 10^{-13}
 \end{aligned}$$

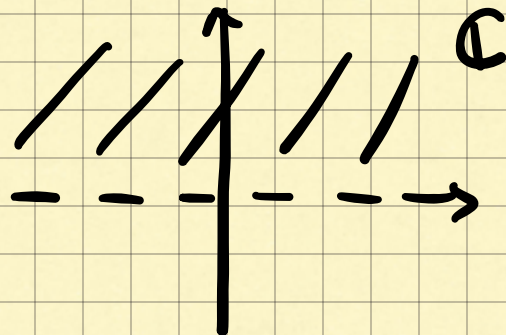
↑ Ramanujan's constant
&

TOPIC OF TODAY!

Have you heard about j -invariant?

famous elliptic modular function!

j is defined on \mathbb{H} :



Its " q -expansion":

$$j(\tau) = q^{-1} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + \dots$$

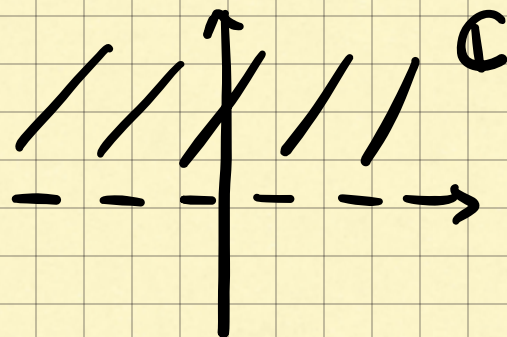
where $q = e^{2\pi i \cdot \tau}$.

②

Have you heard about j -invariant?

famous elliptic modular function!

j is defined on \mathbb{H} :



Its " q -expansion":

$$j(\tau) = q^{-1} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + \dots$$

where $q = e^{2\pi i \tau}$.

We choose $\tau := \frac{1 + \sqrt{-163}}{2}$.

Since $q = e^{2\pi i \tau} = -e^{-\pi \sqrt{163}}$ is tiny,

$$e^{\pi \sqrt{163}} = -q^{-1} \approx 744 - j(\tau).$$

Claim follows from:

$j(\tau)$ is an integer!

But what are
values of j ?...

They are fascinating!

Say, $|\mathbb{Q}[z] : \mathbb{Q}| = \text{deg}$
 imaginary — algebraic number

Dear deg!
Are you?

But what are values of j ?...

They are fascinating!

Say, $|\mathbb{Q}[z] : \mathbb{Q}| = \deg$
 imaginary algebraic number

Dear deg!
 Are you?

≥ 3
 $j(z)$ is
 transcendental

$= 2$
 $j(z)$ is algebraic &
 can be expressed
 in radicals!

And values are often cubes:

$$j(\sqrt{-5}) = (2\sqrt{5}(13+5\sqrt{5}))^3$$

$$j\left(\frac{1+\sqrt{-163}}{2}\right) = -640320^3$$

So what's special about 163?

Heegner numbers:

1, 2, 3, 7, 11, 19, 43, 67, 163.

All the numbers $d > 0$ s.t.

$\mathbb{Q}[\sqrt{-d}]$ has unique factorization!

conjectured by Gauss :)

In fancy language:

$\text{Cl}(\mathbb{Q}[\sqrt{-d}])$ has size 1.

So what's special about 163?

Heegner numbers:

1, 2, 3, 7, 11, 19, 43, 67, 163.

All the numbers $d > 0$ s.t.

$\mathbb{Q}[\sqrt{-d}]$ has unique factorization!

conjectured by Gauss :)

In fancy language:

$Cl(\mathbb{Q}[\sqrt{-d}])$ has size 1.

Hard theorem: $\forall d = 4k+3, \tau = \frac{1+\sqrt{-d}}{2}$

$j(\tau)$ is an algebraic integer
of degree $|Cl(\mathbb{Q}[\sqrt{-d}])|$ over $\mathbb{Q}[\sqrt{-d}]$.

$|Cl| = 1 \Rightarrow j(\tau) \in \mathbb{Q}[\sqrt{-d}] \cap \mathbb{R} \Rightarrow$
 $j(\tau) \in \mathbb{Q}$ and is alg integer $\Rightarrow j(\tau) \in \mathbb{Z}$!

And what is Cl ? ideal class group
measures (non-)unique factorization

K number field

\mathcal{O}_K algebraic integers $\in K$
(roots of monic polynomials in $\mathbb{Z}[t]$)

$$Cl(K) := \mathcal{I}_K / \mathcal{P}_K$$

finite group

fractional $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_K$

principal fractional

fractional "ideal": $\mathcal{I} = r^{-1} \mathfrak{J}$, \mathfrak{J} ideal

unique factorization $\Rightarrow \mathcal{I}_K = \mathcal{P}_K$

And what is Cl ? ideal class group
measures (non-)unique factorization

K number field

\mathcal{O}_K algebraic integers $\in K$
(roots of monic polynomials in $\mathbb{Z}[t]$)

$$Cl(K) := \mathcal{I}_K / \mathcal{P}_K$$

finite group

fractional principal fractional $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_K$

fractional "ideal": $\mathcal{I} = r^{-1} \mathfrak{J}$, \mathfrak{J} ideal
unique factorization $\Rightarrow \mathcal{I}_K = \mathcal{P}_K$

Example: $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$
 $\mathcal{I} = (2, 1 + \sqrt{-5})$ is NOT principal!
 $\mathcal{I}^2 = (2) \Rightarrow Cl(K) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

related to: $6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})$

♥ "ideal numbers" \rightsquigarrow non-principal ideals
Kummer Dedekind

- So tell me, what is j ?

- Well...

Simplest f : $f(\tau) = f(\tau+1)$
 is $f(\tau) := e^{2\pi i\tau}$

And simplest f : $f(\tau) = f(\tau+1) = f(-\frac{1}{\tau})$
 is $f(\tau) := j(\tau) =$ $SL_2(\mathbb{Z})$ -invariant
 & holomorphic

= horrible formula

- So tell me, what is j ?

- Well...

Simplest f : $f(\tau) = f(\tau+1)$
 is $f(\tau) := e^{2\pi i \tau}$

And simplest f : $f(\tau) = f(\tau+1) = f(-\frac{1}{\tau})$
 is $f(\tau) := j(\tau) =$ $SL_2(\mathbb{Z})$ -invariant
 & holomorphic

= **horrible formula**

Cool fact: j parametrizes
 elliptic curves / \mathbb{C} !
 (and \mathbb{R})



Because: $E = \mathbb{C} / \Lambda$, $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$

depends on $\omega_2 / \omega_1 \in \mathbb{H} \rightsquigarrow$

$\text{Ell}_{\mathbb{C}} \cong \mathbb{H} / SL_2(\mathbb{Z}) \xrightarrow{j} \mathbb{C}$, so j is the coordinate.

7

And why did you say that

Hard theorem: $\forall d = 4k+3, \tau = \frac{1+\sqrt{-d}}{2}$

$j(\tau)$ is algebraic (integer)

of degree $|\text{Cl}(\mathbb{Q}[\sqrt{-d}])|$ over $\mathbb{Q}[\sqrt{-d}]$?
 $\stackrel{=}{=} k$

Claim: $\text{Cl}(k) \cong \text{Gal}(k[j(\tau)]/k)$
 \forall such τ, k

Claim \Rightarrow Gal finite & abelian
 $\Rightarrow j(\tau)$ expressed in radicals!

And why did you say that

Hard theorem: $\forall d = 4k + 3, \tau = \frac{1 + \sqrt{-d}}{2}$

$j(\tau)$ is algebraic (integer)
of degree $|\text{Cl}(\mathbb{Q}[\sqrt{-d}])|$ over $\mathbb{Q}[\sqrt{-d}]$?
 $\stackrel{!}{=} k$

Claim: \forall such $\tau, k, \text{Cl}(k) \cong \text{Gal}(k[j(\tau)]/k)$

Claim \Rightarrow Gal finite & abelian
 $\Rightarrow j(\tau)$ expressed in radicals!

Proof idea: $\mathcal{E} := \left\{ \begin{array}{l} E/\mathbb{C} \text{ elliptic curve} \\ \text{End}(E) \cong \mathcal{O}_k \end{array} \right\}$ with complex multiplication

- Gal \curvearrowright $\left\{ \begin{array}{l} j(\tau) \text{ and} \\ \text{its} \\ \text{conjugates} \\ \text{all } j(\tau') \in j(\mathcal{E}) \end{array} \right\} \rightsquigarrow \text{Gal} \curvearrowright \mathcal{E}$
 - $\text{Cl} \cong \mathcal{E}$ (exercise) $\rightsquigarrow \text{Cl} \curvearrowright \mathcal{E}$
- AGREE!** ...

and the degree is correct! :)



Recall:

$$j(\tau) = q^{-1} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + \dots$$

What's special about 196884?

It is breath of the Monster!

Finite simple groups:

- classification (≈ 12000 pages)
- 18 infinite families (C_p, A_n etc)
- 26 groups don't fit in
- Monster group: the biggest!

(2nd: Baby Monster, others: Happy Family)

- $|Monster| \approx 8 \cdot 10^{53}$



Recall:

$$j(\tau) = q^{-1} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + \dots$$

What's special about 196884?

It is breath of the Monster!

Finite simple groups:

- classification (~ 12000 pages)
- 18 infinite families (C_p, A_n etc)
- 26 groups don't fit in
- Monster group: the biggest!

(2nd: Baby Monster, others: Happy Family)

- $|Monster| \approx 8 \cdot 10^{53}$

Monstrous Moonshine:

$$\dim \left(\begin{array}{l} \text{smallest} \\ \text{irreducible} \\ \text{representation} \\ \text{of Monster} \end{array} \right) = 196883$$

and other coeffs are linear combinations
of dims of other reps... with small coeffs > 0
Borcherds!